

НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 10.  
Группы и алгебры Ли. 16.11.2015.

**Задача 1.** Доказать, что группы  $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $U(n)$  и  $SU(n)$  являются группами Ли. Указание: можно рассмотреть стабилизаторы подходящего действия.

**Задача 2.** Доказать, что коммутатор двух левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей тоже является левоинвариантным (правоинвариантным).

Доказать, что оба определения коммутатора в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  эквивалентны. Доказать, что если в определении использовать правоинвариантные векторные поля, то мы получим коммутатор, умноженный на  $-1$ .

**Задача 3.** Доказать, что

- алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  является пространством всех вещественных  $n \times n$ -матриц с нулевым следом со стандартным матричным коммутатором;
- алгебра Ли  $\mathfrak{so}(n)$  является пространством всех вещественных кососимметрических  $n \times n$ -матриц со стандартным матричным коммутатором, причём  $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$ ;
- алгебра Ли  $\mathfrak{u}(n)$  является пространством всех комплексных косоэрмитовых  $n \times n$ -матриц со стандартным матричным коммутатором;
- алгебра Ли  $\mathfrak{su}(n)$  является пространством всех комплексных косоэрмитовых  $n \times n$ -матриц с нулевым следом со стандартным матричным коммутатором;

**Задача 4.** Доказать, что  $\text{ad } \xi(\eta) = [\xi, \eta]$ .

**Задача 5.** Доказать, что группа Ли всегда ориентируема.

Доказать, что прямое произведение групп Ли является группой Ли. Как найти соответствующую алгебру Ли?

**Задача 6.** Пусть  $G$  — связная группа Ли,  $\mathfrak{g}$  — её алгебра Ли. Доказать, что если коммутатор любых элементов  $\mathfrak{g}$  равен нулю, то  $G$  абелева (поэтому алгебры Ли с нулевым коммутатором называются абелевыми).

**Задача 7.** Построить естественные гомоморфизмы групп Ли  
а)  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ , б)  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$ .

**Задача 8.** Доказать, что

- компонента связности единицы  $G^0$  группы Ли  $G$  является нормальной подгруппой Ли группы  $G$ ,
- компоненты связности группы Ли  $G$  являются смежными классами по  $G^0$ ,
- факторгруппа  $G/G^0$  дискретна.

**Задача 9.** Пусть группа Ли  $G$  транзитивно действует на связном многообразии  $M$ . Доказать, что

- компонента связности единицы  $G^0$  тоже транзитивно действует на  $M$ ,
- $G/G^0 \cong G_x/(G_x \cap G^0)$  для любой точки  $x \in X$ ,
- если существует такая точка  $x \in X$ , что стабилизатор  $G_x$  связан, то группа Ли  $G$  тоже связна.

**Задача 10.** Найти число компонент связности для  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ .