

**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 12.**  
**Лемма Сарда, трансверсальность, степень отображения. 7.12.2015.**

**Задача 1.** Два подмногообразия (без края)  $K_1$  и  $K_2$  замкнутого (компактного, без края) многообразия  $M$  называются *бордантными*, если существует подмногообразие  $W$  многообразия  $M$ , край  $\partial W$  которого является объединением  $K_1$  и  $K_2$ .

Пусть  $f$  гладкое отображение многообразия  $M^n$  в связное многообразие  $N^k$ ,  $n \geq k$ , а  $y_1$  и  $y_2$  не критические значения отображения  $f$ .

Доказать, что подмногообразия  $f^{-1}(y_1)$  и  $f^{-1}(y_2)$  бордантны.

**Задача 2.** В ситуации предыдущей задачи пусть  $f_1$  и  $f_2$  гомотопные гладкие отображения  $M$  в  $N$ ,  $y_1$  и  $y_2$  не критические значения  $f_1$  и  $f_2$  соответственно. Доказать, что подмногообразия  $f_1^{-1}(y_1) \times \{1\}$  и  $f_2^{-1}(y_2) \times \{-1\}$  многообразия  $M \times \mathbb{S}^1$  бордантны.

**Задача 3.** Пусть  $f$  гладкая функция на пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что существует линейная функция  $\ell$  на  $\mathbb{R}^n$ , такая что функция  $f + \ell$  имеет только невырожденные критические точки.

**Задача 4.** Пусть  $M$  подмногообразие аффинного пространства  $\mathbb{R}^N$ . Доказать, что существует точка  $P_0 \in \mathbb{R}^N$ , для которой функция  $r(x) = \rho(x, P_0)$  на многообразии  $M$  имеет только невырожденные критические точки.

**Задача 5.** Вычислить степень отображения  $F$  комплексного проективного  $n$ -мерного пространства в себя, определяемого формулой

$$F(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = (z_0^m : z_1^m : \dots : z_n^m).$$

**Задача 6.** Вычислить степень отображения  $F$  многообразия  $\text{SO}(n)$  в себя, задаваемого формулой  $F(A) = A^m$ , где  $A \in \text{SO}(n)$ .

**Задача 7.** Пусть  $f$  комплексно аналитическое отображение компактного комплексного многообразия  $M^n$  в комплексно аналитическое многообразие  $N^n$ . Доказать, что степень отображения  $f$  неотрицательна.

**Задача 8.** Пусть  $f : N \rightarrow M$  гладкое отображение многообразий с краем одной размерности, при котором связный край  $\partial N$  переходит в связный край  $\partial M$ . Доказать, что  $\deg f|_{\partial N} = \deg f$ .

**Задача 9.** Доказать, что два гладких отображения  $f, g : M \rightarrow \mathbb{S}^n$  замкнутого  $n$ -мерного ориентированного многообразия  $M$  в  $n$ -мерную сферу гомотопны тогда и только тогда, когда  $\deg f = \deg g$ .

**Задача 10.** Пусть  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  отображение замкнутого  $n$ -мерного многообразия  $M$  в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что прообраз любого регулярного значения  $y \in \mathbb{R}^n$  состоит из чётного числа точек.