

**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 4.
Подмногообразия. Многообразия с краем. 28.09.2015.**

Задача 1. Пусть M многообразиие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразиие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p \iota : T_p N \rightarrow T_{\iota(p)} M$ изоморфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_p N$ с $d_p \iota(X) \in T_{\iota(p)} M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N , подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)} N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$.

Докажите, что коммутатор двух векторных полей на M , касательных к подмногообразиию N , — тоже векторное поле, касательное к N .

Задача 2. Пусть $N \subset M$ подмногообразиие. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, такую, что $\gamma((a, b)) \subset N$. Покажите, что не обязательно $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} N$ для каждого $t \in (a, b)$.

Задача 3. Рассмотрим \mathbb{S}^1 как единичную окружность в комплексной плоскости и тор \mathbb{T} как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Докажите, что (\mathbb{R}, φ) — плотное подмногообразиие в \mathbb{T} (оно называется плотной обмоткой тора). Это подмногообразиие вложено?

Задача 4. Доказать, что замкнутая верхняя полусфера

$$\mathbb{S}_{\geq 0}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

является многообразиием с краем.

Задача 5. Является ли открытый диск $\text{Int} D^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ многообразиием с краем?

Задача 6. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ определено формулой

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Для каких из точек $p = (0, 0)$, $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $p = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ множество $f^{-1}(f(p))$ будет вложенным подмногообразиием в \mathbb{R}^2 ?

Задача 7. Является ли $\text{SL}(n)$ подмногообразиием $\text{GL}(n)$? Вложенным подмногообразиием? Погружённым подмногообразиием?

Задача 8. Построить пример такой поверхности Σ в \mathbb{R}^n , что её сечение $\Sigma \cap H$ некоторой гиперплоскостью $H \subset \mathbb{R}^n$ не является подмногообразиием.

Задача 9*. Пусть M — гладкое многообразиие и A — подмножество в M . Фиксируем топологию на A . Тогда на A существует не более одной структуры гладкого многообразиия, такой, что (A, i) — подмногообразиие в M , где i — отображение вложения.

Задача 10*. Пусть снова A — подмножество в M . Если в индуцированной топологии A обладает структурой гладкого многообразиия, такой, что (A, i) — подмногообразиие M , то на A существует единственная структура многообразиия, то есть единственная локально евклидова топология с второй аксиомой счётности и единственная дифференцируемая структура, такая, что (A, i) — подмногообразиие в M .