1◇1. Вычислите гомологии и когомологии а) $\mathbb{R}P^n$, б) $\mathbb{C}P^n$, в) $\mathbb{H}P^n$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$ г) пространства $K(\mathbb{Z}_p, 1)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$.

1◇2. Постройте функториальный изоморфизм $H_*(X) \cong H_{*+1}(SX)$, где SX — надстройка над X.

1◇3. Пусть X и Y — CW-комплексы. Вычислите кольцо когомологий а) $X \vee Y$ б) $X \wedge Y$ в) $X * Y$, если известны кольца когомологий сомножителей.

▷ Напомним, что у компактных ориентируемых многоообразий M и N размерности $\dim M = \dim N = n$ старшие гомологии $H_n(M) \cong H_n(N) \cong \mathbb{Z}$. Таким образом, можно определить степень отображения $f\colon M \to N$ как целое число $d = f_*(1)$.

1◇4. Существует ли отображение а) $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ б) $\mathbb{C}P^3 \to \mathbb{C}P^3$ степени 9?

1◇5. Если X — двумерный CW-комплекс и $\pi_2(X) = 0$, то и $\pi_n(X) = 0$ при $n \geqslant 2$.

1◇6. а) S^∞ стягиваема, б) $S^\infty X$ стягиваема.

1◇7. Постройте нетривиальное расслоение а) $S^1 \to S^3 \to S^2$ б) $S^3 \to S^7 \to S^4$.

1◇8. а) $\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$ б) $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$.

Отсюда $H^1(B; \mathbb{Z}_2) \cong [B, \mathbb{R}P^\infty]$ и $H^2(B; \mathbb{Z}) \cong [B, \mathbb{C}P^\infty]$.

1◇9. а) Постройте расслоение $V_{m-1,n-1} \to V_{m,n} \to S^{n-1}$ б) $\pi_k(V_{m,n}) = 0$ при $k < n - m$.

▷ Вложение $R^n \hookrightarrow R^{n+1}$ индуцирует вложение $V_{m,n} \hookrightarrow V_{m,n+1}$. За $V_m \overset{\text{def}}{=} V_{m,\infty}$ обозначим прямой предел последовательности $V_{m,m} \hookrightarrow V_{m,m+1} \hookrightarrow \dots$
в) V_m стягиваемо.

1◇10. Любое односвязное замкнутое ориентируемое 3-мерное многообразие гомотопически эквивалентно S^3.

1◇11. Пусть $Y \subset X$ — вложение CW-подкомплекса, A — произвольное клеточное пространство. Последовательность множеств классов гомотопий отображений точна

$$[X \cup_Y CY, A] \to [X, A] \to [Y, A],$$

где оба отображения индуцированы отображениями включения.

1◇12. Если в пространстве X есть два ассоциативных умножения $X \times X \to X$ (скажем, $a \cdot b$ и $a * b$), для которых выполняются распределительные законы по отношению друг к другу, то эти умножения совпадают и коммутативны.