▷ Везде в этом листке ε^n обозначает тривиальное расслоение ранга n над базой и полем понятными из контекста.

3◇1. а) Сумма Уитни касательного расслоения $\tau(S^n)$ к S^n и одномерного тривиального расслоения ε^1 тривиальна.

б) Пусть M — подмногообразие в евклидовом пространстве, заданное системой уравнений $f_1 = \dots = f_k = 0$ с гладкими f_j. Тогда сумма Уитни касательного расслоения $\tau(M)$ и тривиального расслоения тривиальна.

3◇2. а) Расслоение $\tau(S^n)$ содержит одномерное тривиальное подрасслоение тогда и только тогда, когда n нечётно.

б) Произведение $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}, k > 1$ параллелизуемо тогда и только тогда, когда среди n_j есть хотя бы одно нечётное.

3◇3. Приведите пример двух нетривиальных расслоений, таких, что их а) сумма Уитни б) тензорное произведение — тривиальное расслоение.

В следующей задаче никаких условий на пространстранство (компактность, паракомпактность) нет.

3◇4. а) Пусть ξ — векторное расслоение наделённое евклидовой (соотв. эрмитовой). Тогда $\xi \cong \mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$ (соотв. $\overline{\xi} \cong \mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$)

б) Множество классов изморфных одномерных векторных расслоениений образует абелеву группу относительно операции тензорного произведения.

в) Линейное вещественное расслоение ξ можно наделить метрикой тогда и только тогда, когда оно представляет элемент порядка $\leqslant 2$ в этой группе.

3◇5. В случае, когда база B компактна а) группа из предыдущей задачи изоморфна $H^1(B, \mathbb{Z}_2)$ ($H^2(B, \mathbb{Z})$ в комплексном случае).

б) Групповая структура, введённая на классах линейных расслоений в предыдущей задаче, совпадает со структурой из задачи **2◇8**.

3◇6. На любом векторном расслоении над паракомпактным клеточным комплексом существует евклидова (в комплексном случае, эрмитова) метрика.

Указание. Паракомпактность пространства зачастую используется для существования *разбиения единицы*.

▷ Таким образом, всякое GL_n расслоение редуцируется к $O(n)$ или $U(n)$ расслоению с помощью ортогонализации Грама-Шмидта.

3◇7. а) Касательное расслоение $\tau(\mathbb{R}P^n)$ к $\mathbb{R}P^n$ можно отождествить с множеством пар $\{(x, v), (-x, -v)\}$, где x — прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$, а v — ортогональный ей вектор.

б) $\tau(\mathbb{R}P^n) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

в) $\tau(\mathbb{R}P^n) \oplus \varepsilon^1 \cong (\gamma^*)^{\oplus n+1} \cong \gamma^{\oplus n+1}$.

3◇8. Докажите, что а) $T^n = (S^1)^{\times n}$ можно вложить в $\mathbb{R}^{n+1}$ б) $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$ можно вложить в $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k+1}$.

3◇9. Нормальное расслоение, ассоциированное с диагональным вложением многообразия M в $M \times M$, канонически изоморфно касательному расслоению к M.