Кольца и поля

▷ По умолчанию в этом листке *кольцо* — это коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Задача 1.1. Какие элементы обратимы в кольцах $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?

▷ Пусть R — кольцо, $d \in R$. Через $R[\sqrt{d}]$ будем обозначать множество формальных записей вида $a + b\sqrt{d}$ $(a, b \in R)$ с естественными операциями:

$$(a + b\sqrt{d}) + (a' + b'\sqrt{d}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{d};$$
$$(a + b\sqrt{d}) \times (a' + b'\sqrt{d}) = (aa' + dbb') + (ab' + a'b)\sqrt{d}.$$

Тем, что получается кольцо, будем пока пользоваться без доказательства.

Задача 1.2. Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ — поле. При каких d является полем $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$?

Задача 1.3. Какие элементы обратимы в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$?

Задача 1.4. Кольцо является полем тогда и только тогда, когда в нем нет нетривиальных (отличных от нуля и всего кольца) идеалов.

Задача 1.5. Приведите пример нетривиального идеала кольца непрерывных функций на прямой.

Задача 1.6. Пусть $f\colon R \to S$ — гомоморфизм колец.
а) Докажите, что $f^{-1}(0)$ («ядро гомоморфизма f») — идеал в R.
б) Верно ли, что прообраз любого идеала при гомоморфизме — идеал?
в) Верно ли, что образ любого идеала при гомоморфизме — идеал?