Кольца и идеалы

Задача 2.0. $R[\sqrt{d}] \cong R[x]/(x^2-d)$. (Следствие: левая часть действительно является кольцом.)

Задача 2.1. а) Опишите все идеалы и соответствующие факторкольца для колец $\mathbb{C}[x]$ и $\mathbb{R}[x]$ (основной теоремой алгебры можно пользоваться без доказательства).

б) Найдите все обратимые элементы и опишите все идеалы в кольце $k[[x]]$ формальных степенных рядов над произвольным полем.

Задача 2.2. Является ли $\mathbb{Q}[x, y]$ кольцом главных идеалов? А $\mathbb{Z}[x]$?

Задача 2.3. Пусть I_x — идеал обращающихся в ноль в точке x непрерывных функций на отрезке. Опишите соответствующее факторкольцо.

Задача 2.4. а) Кольцо *целых чисел Гаусса* $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ евклидово относительно нормы $N(z) = z\bar{z}$ (в частности, это кольцо факториально).

б) Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ не факториально.

Из-за того, что $N(a+b\sqrt{-1}) = a^2+b^2$, изучение кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ помогает выяснить, какие целые числа представимы в виде суммы двух квадратов.

Задача 2.5. а) Найдите все обратимые элементы кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.

б) Разложите 2, 15, 29 в произведение простых гауссовых.

Задача 2.6. а) Если целые числа n и m представимы в виде суммы двух квадратов, то и число nm представимо в виде суммы двух квадратов.

б) Если $n = x^2 + y^2$ делится на простое $p \neq 2$, то либо x и y делятся на p, либо p тоже представимо в виде суммы двух квадратов.

в) Верны ли предыдущие два утверждения для представлений в виде $x^2 + 5y^2$?

Задача 2.7. Пусть p — нечетное целое простое число. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) (а1) число p является простым гауссовым;
(а2) кольцо $\mathbb{F}_p[\sqrt{-1}]$ является полем;
(а3) уравнение $x^2 = -1$ не разрешимо в $\mathbb{F}_p$;

б) (б0) число p представимо в виде суммы двух квадратов;
(б1) число p имеет вид $\pi\bar{\pi}$, где π — простое гауссово;
(б2) кольцо $\mathbb{F}_p[\sqrt{-1}]$ изоморфно кольцу $\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p$;
(б3) уравнение $x^2 = -1$ разрешимо в $\mathbb{F}_p$;

в) Что происходит при $p = 2$?

г) Других простых в $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ нет.

Задача 2.8. а) Если $p = 4k + 3$, то p не представимо в виде суммы двух квадратов. Если $p = 4k + 1$ — простое число, то $(2k)!$ — корень из -1 в $\mathbb{F}_p$ (и, как следствие предыдущей задачи, p представимо в виде суммы двух квадратов).

б) Какие целые числа представимы в виде суммы двух квадратов?