

## Кольца и идеалы (продолжение)

▷ В этом листке *кольцо* — это коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

**Задача 3.1.** Идеал  $I$  кольца  $A$  прост тогда и только тогда, когда кольцо  $A/I$  целостно.

**Задача 3.2.** Приведите пример кольца  $A$  и такого неприводимого элемента  $p$  в нем, что идеал  $pA$  не прост.

**Задача 3.3.** Найдите все максимальные идеалы в кольце а)  $\mathbb{C}[x]$ ; б\*)  $C([0; 1])$ .

**Задача 3.4.** Всегда ли при гомоморфизме колец а) прообраз простого идеала прост; б) прообраз максимального идеала максимален?

\* \* \*

**Задача 3.5.** Числами Эйзенштейна называется подкольцо  $\mathbb{Z}[\omega] \subset \mathbb{C}$ , порожденное кубическим корнем из единицы  $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ .

а) Представьте  $\mathbb{Z}[\omega]$  как фактор  $\mathbb{Z}[x]$  по идеалу.

б) Найдите обратимые элементы в  $\mathbb{Z}[\omega]$ . Докажите, что это евклидово (в частности, факториальное) кольцо.

в) Какие целые простые числа остаются простыми в кольце  $\mathbb{Z}[\omega]$ ? Опишите простые идеалы и соответствующие факторкольца в этом кольце.

г) Какие целые числа представимы в виде  $x^2 + xy + y^2$ ?