

## Неприводимые многочлены

**Задача 4.1.** а) Любое отображение конечного поля в себя задается некоторым многочленом.

б) Приведите пример двух различных многочленов над  $\mathbb{F}_p$ , совпадающих как функции.

**Задача 4.2.** Неприводимы ли следующие многочлены в  $\mathbb{Q}[x]$

а)  $x^3 - 2$ ; б)  $x^4 + 4$ ; в)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ; г)  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ?

**Задача 4.3.** Может ли неприводимый в  $\mathbb{Q}[x]$  многочлен иметь кратный (иррациональный) корень?

▷ Будем обозначать через  $\mathbb{Q}(\alpha)$  подполе в  $\mathbb{C}$ , порожденное числом  $\alpha$  (т.е. состоящее из чисел, получающихся арифметическими операциями из 1 и  $\alpha$ ).

**Задача 4.4.** Либо  $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[x]/(f)$  для некоторого неприводимого многочлена  $f$  (“минимальный многочлен числа  $\alpha$ ”), либо  $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(x)$ .

(Указание: рассмотрите гомоморфизм  $\mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$ .)

**Задача 4.5.** Найдите минимальный многочлен для а)  $1+i$ ; б)  $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ; в)  $\cos(2\pi/5)$ .

**Задача 4.6.** В  $\mathbb{F}_p[x]$

а) бесконечно много неприводимых многочленов;

б\*) есть неприводимый многочлен любой степени.