Размерность и построения циркулем и линейкой

Задача 6.1. Чему равна размерность векторного пространства

а) арифметических прогрессий;

б) таких последовательностей, что $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ для всех $n > 1$;

в) многочленов степени не выше 11 с рациональными коэффициентами, обращающихся в ноль в точках 3, 5 и 7;

г) многочленов степени не выше 11 с рациональными коэффициентами, обращающихся в ноль в точке $\sqrt[3]{2}$?

Задача 6.2. Являются ли функции

а) $x^k\colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ $(0 \leqslant k < p)$; б) $e^{\alpha x}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; в) $1, \sin kx, \cos kx\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

линейно независимыми над соответствующими полями?

▷ Напомним, что если K — подполе поля L, то размерность L как векторного пространства над K называется *степенью расширения* и обозначается $[L : K]$.

Задача 6.3. Найдите $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

Задача 6.4. Пусть на плоскости введена система координат. Будем сопоставлять каждому набору $\mathcal{K}$ точек на плоскости подполе $K \subset \mathbb{R}$, порожденное всеми координатами этих точек.

Докажите, что если $\mathcal{L}$ получается из $\mathcal{K}$ добавлением точки пересечения а) двух прямых; б) прямой и окружности; в) двух окружностей с коэффициентами из K, то либо $L = K$, либо $[L : K] = 2$.

Задача 6.5. а) Чему может равняться степень расширения $[\mathbb{Q}(\cos\varphi/3) : \mathbb{Q}(\cos\varphi)]$?

б) Циркулем и линейкой невозможно построить правильный 9-угольник (в частности, невозможно решить задачу о трисекции произвольного угла).

в) Можно ли построить циркулем и линейкой правильный 7-угольник?

(Указание. Какие решения имеет уравнение $\cos 3\varphi = \cos 4\varphi$?)

На самом деле, правильный n-угольник можно построить цикрулем и линейкой тогда и только тогда, когда $\varphi(n) = 2^k$.