Векторные подпространства

Задача 8.0. Чему равна размерность пространства таких многочленов степени не выше k, что а) $P(x) = P(1-x)$; б) $P(x) + P(1-x) = 0$?

▷ В этом листке V — векторное пространство, U_i — его подпространства.

Задача 8.1. Постройте естественные (не использующие выбора базиса и т. п.) изоморфизмы

а) $U_1 + U_2 \cong (U_1 \oplus U_2)/(U_1 \cap U_2)$;

б) $(U_1 + U_2)/U_1 \cong U_2/(U_1 \cap U_2)$;

в) $V/(U_1 + U_2) \cong (V/U_1)/(U_2/(U_1 \cap U_2))$.

Задача 8.2. Из задачи 1а видно, что $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$. Докажите или опровергните, что

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 - \\ - \dim U_2 \cap U_3 - \dim U_1 \cap U_3 - \dim U_1 \cap U_2 + \dim U_1 \cap U_2 \cap U_3.$$

Задача 8.3. Любые два подпространства одинаковой размерности переводятся друг в друга автоморфизмом объемлющего пространства. Другими словами, подпространства классифицируются одним целым числом (размерностью).

Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения для а) пар; б) троек подпространств.

в) Докажите, что для четверок подпространств дискретной классификации не существует: постройте несчетный набор попарно неизоморфных четверок подпространств фиксированного конечномерного пространства.

Задача 8.4. Сколько в n-мерном пространстве V над полем $\mathbb{F}_q$...

а) ...одномерных подпространств? (Будем обозначать это число $[n]$.)

б) ...*полных флагов* (цепочек подпространств $\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n = V$)?

в) ...k-мерных подпространств?

(Получив каждый из ответов, подставьте в него формально $q = 1$ — не пожалеете.)