Линейные отображения

Задача 9.0. Оператор на конечномерном векторном пространстве сюръективен тогда и только тогда, когда он инъективен.

Задача 9.1. Покажите, что для взаимно простых многочленов P и Q естественный гомоморфизм колец $k[x]/(PQ) \to k[x]/(P) \oplus k[x]/(Q)$ инъективен (а следовательно, в силу предыдущей задачи, является изоморфизмом).

Задача 9.2. Пусть $\Delta\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ — *разностная производная*: $(\Delta P)(x) = P(x) - P(x-1)$.

а) Найдите ядро оператора Δ.

б) Выведите из предыдущего пункта сюръективность оператора Δ.

в) Выведите из предыдущего пункта, что для любого k сумма $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ является многочленом от n.

Задача 9.3. Найдите все собственные вектора оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}\colon \mathbb{R}[[x]] \to \mathbb{R}[[x]]$.

Задача 9.4. а) Пусть V — пространство последовательностей, т. ч. $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $T\colon V \to V$ — *оператор сдвига*: $(Tx)_n = x_{n+1}$. Найдите собственный базис и собственные значения этого оператора. Разложите по этому базису последовательность Фибоначчи и получите формулу для F_n.

б) Когда у оператора сдвига на пространстве последовательностей, удовлетворяющих рекурренте $x_{n+1} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k}$, есть собственный базис?

* * *

Задача 9.5. Если у A^2 есть собственное значение λ^2, то у A есть собственное значение λ или $-\lambda$.

Задача 9.6. Пусть операторы A и B на векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем и а) $AB = BA$; б) оператор $AB - BA$ имеет ранг 1. Докажите, что у них есть общий собственный вектор.

Задача 9.7. Если A и B — два оператора, то характеристические многочлены операторов AB и BA равны.