Определители

Задача 11.1. Вычислите определитель следующих матриц $n \times n$
а) таблицы умножения ($a_{ij} = i \cdot j$); б) $a_{ij} = \min(i, j)$; в) $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$.

Задача 11.2. *Континуанта* $K_n(a_1, \ldots, a_n)$ — это определитель трехдиагональной матрицы: на главной диагонали числа a_i, над ней 1, под ней -1.

а) Найдите $K_n(1, \ldots, 1)$; б) докажите, что $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \dfrac{K_n(a_1, \ldots, a_n)}{K_{n-1}(a_2, \ldots, a_n)}$.

Задача 11.3. а) Вычислите определитель *матрицы Вандермонда* (x_j^{i-1}).
б*) Вычислите определитель *матрицы Коши* $(1/(x_i + y_j))$.
Указание. Когда такой определитель обращается в ноль?

Задача 11.4. Выведите из предыдущей задачи
а) линейную независимость функций вида $e^{\alpha x} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
б) существование и единственность интерполяционного многочлена.

▷ *Минор* матрицы — это определитель ее (квадратной) подматрицы A_{IJ}, получающейся, если оставить только элементы a_{ij}, где $i \in I$, $j \in J$.

Задача 11.5. Минор произведения двух матриц (не обязательно квадратных) может быть найден по *формуле Коши–Бине:*

$$\det (AB)_{IJ} = \sum_{S \colon |S| = |I| = |J|} \det A_{IS} \cdot \det B_{SJ}.$$

(Это утверждение обобщает с одной стороны — определение произведения матриц, с другой — мультипликативность определителя.)

▷ *Матрица инцидентности* ориентированного графа — это матрица ∂, строки которой соответствуют вершинам, столбцы — ребрам, а элементы определяются следующим образом

$$\partial_{ve} = \begin{cases} -1, & v \text{ — начало ребра } e; \\ 1, & v \text{ — конец ребра } e; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 11.6. а) На диагонали *матрицы Лапласа* $\Delta := \partial\partial^*$ (где * обозначает транспонирование) стоят степени вершин, а вне диагонали — (-1) для пар вершин, соединенных ребром, и 0 для не соединенных.
б) Определитель матрицы, получающейся из матрицы Лапласа графа вычеркиванием i-й строки и i-го столбца, равен по модулю числу остовных деревьев графа.
в) Найдите число деревьев с n пронумерованными вершинами, применив последнее утверждение к полному графу.
г*) Найдите число двудольных деревьев с n черными и m белыми нумерованными вершинами.
д*) Найдите число остовных деревьев в n-мерном кубе.