Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2016

1

1.1. Задайте полиномиальными уравнениями кривую в $\mathbb{R}^3$

$$\{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

1.2. Сколько существует решений уравнения $x^2 = x$ в кольце $\frac{\mathbb{Z}}{27000\mathbb{Z}}$?

1.3. Для произвольного $A \in\in \mathcal{ANN}$ докажите

$$1_A + \sqrt{0_A} \subseteq A^\times.$$

Существуют ли кольца, для которых это включение можно заменить на равенство? Докажите, что в любом кольце сумма обратимого элемента и нильпотента обратима.

1.4. Докажите, что многочлен от одной переменной над любым коммутативным кольцом обратим тогда и только тогда, когда его свободный член обратим, а все остальные коэффициенты нильпотентны.

1.5. Докажите, что многочлен от одной переменной над любым коммутативным кольцом нильпотентен тогда и только тогда, когда все его коэффициенты нильпотентны.

1.6. Многочлен от одной переменной над коммутативным кольцом называется *примитивным*, если его коэффициенты взаимно просты в совокупности. Докажите, что произведение двух многочленов примитивно тогда и только тогда, когда примитивен каждый из сомножителей.

1.7. Обобщите результаты задач **1.4** – **1.6** на случай колец многочленов от нескольких переменных.

1.8. Пусть коммутативное кольцо A таково, что некоторая степень любого его элемента совпадает с этим элементом. Докажите, что $\mathrm{spec}A = \max A$.

1.9. Коммутативное кольцо называется *булевым*, если квадрат любого его элемента совпадает с этим элементом. Докажите, что фактор булева кольца по любому простому идеалу изоморфен $\mathbb{F}_2$, а любой конечнопорождённый идеал является главным.

1.10. Докажите, что следующие свойства коммутативного кольца равносильны:

(а) в нём – лишь один простой идеал;

(б) любой его элемент либо обратим, либо нильпотентен;

(в) его фактор по нильрадикалу является полем.

8 сентября, *Г.Б. Шабат*