Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2016

2

2.1. В каких кольцах имеет смысл равенство

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}?$$

2.2. Определите $\exp \in \mathbb{Q}[[x]]$ и установите основные свойства этой "функции". Какими свойствами поля $\mathbb{Q}$ вы пользовались?

2.3. Определите $\cos, \sin \in \mathbb{Q}[[x]]$ и установите основные свойства этих "функций". Какими свойствами поля $\mathbb{Q}$ вы пользовались?

2.4. Определите арксинус и логарифм как формальные степенные ряды.

2.5*. Определите тангенс и арктангенс как формальные степенные ряды. **Указание.** Воспользуйтесь *треугольником Эйлера-Бернулли.*

2.6. Определите *морфизм Тейлора*

$$\mathrm{taylor} : \mathcal{C}^{\infty}[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}[[x]].$$

Является ли он мономорфизмом? Эпиморфизмом?

2.7*. Модифицируйте конструкцию предыдущей задачи так, чтобы морфизм Тейлора стал морфизмом *локальных* колец и (по возможности) уважал деление.

2.8. Проверьте перестановочность локализации и факторизации: для $A \in\in \mathcal{ANN}$ и $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}A$ постройте изоморфизм

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}} \cong \mathfrak{ff}\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right).$$

2.9. Для $A \in\in \mathcal{ANN}$ и $f \in A$ положим

$$\neg\mathrm{Zer}(f) := \mathrm{spec}A \setminus \mathrm{Zer}(\{f\}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}A \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Такие (*открытые* в топологии Зариского) подмножества спектра кольца называются *главными*. Докажите, что главные открытые множества образуют *базу* топологии Зариского.

2.10. Докажите, что спектр любого коммутативного кольца *квазикомпактен* (из любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие). **Указание.** Достаточно рассмотреть покрытия главными открытыми множествами.

2.11. Пусть $\varphi : A \to B$ – морфизм коммутативных колец. Проверьте непрерывность отображения

$$\varphi^{\#} : \mathrm{spec}B \longrightarrow \mathrm{spec}A : \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1\circ}(\mathfrak{q}).$$

2.12. Опишите спектр кольца *гауссовых чисел* $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ изучите слои отображения $\mathrm{spec}\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \to \mathrm{spec}\mathbb{Z}$.

15 сентября, *Г.Б. Шабат*