Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2016

3

3.1*. Для $N = 1, 2, 3, \ldots$ вычислите в кольце $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^N \rangle}$ конечное произведение

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$$

Попытайтесь (вслед за Эйлером...) угадать его и обосновать (решение можно найти у Полиа и Сегё). В каких кольцах имеет смысл

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1-x^k)?$$

3.2. Пусть морфизм колец $f : A \to B$ инъектвен. Обязательно ли инъективно или сюръективно отображение $f^{\#} : \mathrm{spec}B \to \mathrm{spec}A$?
3.3. Пусть морфизм колец $f : A \to B$ сюръектвен. Обязательно ли инъективно или сюръективно отображение $f^{\#} : \mathrm{spec}B \to \mathrm{spec}A$?
3.4. Непрерывное отображение топологических пространств называется *открытым*, если переводит открытые множества в открытые, и *замкнутым*, если переводит замктнутые множества в замкнутые Считая spec функкотором из категории коммутативных колец в категорию топологических пространств, приведите примеры морфизмов колец$f : A \to B$, для которых отображение $f^{\#} : \mathrm{spec}B \to \mathrm{spec}A$
а) открыто; б) не открыто; в) замкнуто; г) не замкнуто.
3.5. Докажите, что следующие свойства коммутативного кольца логически эквивалентны:
(а) его спектр несвязен;
(б) оно изоморфно произведению ненулевых колец;
(в) в нём есть *нетривиальные идемпотенты*, то есть отличные от 0 и 1 решения уравнения $x^2 = x$.
3.6. Кольцо называется *булевым*, если состоит из нильпотентов. Докажите, что спектр булева кольца – компактное хаусдорфово пространство.

3.7*. Пучть X– компактное хаусдорфово топологическое пространство, а $\mathcal{C}(X)$ – кольцо непрерывных вещественнозначных функций на нём с операциями поточечного сложения и умножения. Введя для $x \in X$ идеал $\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$, докажите, что каждый такой идеал максимален и что отображение $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ определяет биекцию между X и $\max\mathcal{C}(X)$.
3.8. Пусть $X \subseteq \Bbbk^{m\times}$ и $Y \subseteq \Bbbk^{n\times}$ – аффинные алгебраические многообразия. Отображение $X \to Y$ называется *регулярным*, если оно задаётся полиномами $f_1, ..., f_n \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_m]$. Установите биекцию между множеством регулярных отображений $X \to Y$ и морфизмами соответствующих алгебр регулярных функций.

22 сентября, *Г.Б. Шабат*