Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2016

4

4.1. Пусть $A, B \in\in \mathcal{ANN}$ и $A \subseteq B$. Докажите, что множество элементов кольца B, целых над A, образует подкольцо в B; это кольцо называется *целым замыканием* кольца A в кольце B. Приведите примеры расширений колец, для которых целое замыкание меньшего в большем совпадает с б**о**льшим и для которых это замыкание отличается от большего.

4.2. [Для $B \in\in \mathcal{ANN}$ и $M \in\in B - \mathcal{MOD}$ введём его *аннулятор* $M^{\perp} := \{b \in B \mid bM = \{0_M\}\}$. Модуль M называется *точным*, если $M^{\perp} = \{0_B\}$.] Пусть $A, B \in\in \mathcal{ANN}$ и $B \supseteq A$. Докажите, что элемент $b \in B$ цел над A тогда и только тогда, когда в B существует такой точный конечнопорождённый A-подмодуль $M \subseteq B$, что $bM \subseteq M$. **Указание.** Для доказательства одной импликации надо рассмотреть модуль $\langle b, b^2, b^3, \dots \rangle$, а для доказательства другой – воспользоваться характеристическим многочленом матрицы умножения на b в каком-либо базисе.

4.3. При каких $t \in \mathbb{C}$ целозамкнуты кольца $\frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle x(x-1)(x-t)-y^2 \rangle}$?

4.4. При каких $d \in \{2, 3, \dots, 10\}$ целозамкнуты кольца $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$?

4.5. Целозамкнуто ли кольцо $\frac{\mathbb{R}[x,y,z]}{x^2+y^2-z^2}$?

4.6. Пусть $f : A \to B$ – целый морфизм колец. Докажите, что отображение $f^{\#}$ замкнуто.

4.7. Пусть G – конечная группа автоморфизмов кольца A. Докажите, что кольцо A цело над кольцом инвариантов $\{a \in A \mid G \cdot a = \{a\}\}$.

4.8. Пусть $\mathbb{K}$ – поле и $R \subseteq \mathbb{K}$ – его подкольцо. Докажите, что, если $\mathbb{K}$ цело над R, то R – тоже поле.

4.9. Пусть $\mathbb{K}$ – поле, $R \subseteq \mathbb{K}$ – его подкольцо, $x \in \mathbb{K}$ и $R[x] = \mathbb{K}$. Докажите, что для некоторого $s \in \dot{R}$ кольцо $R[\frac{1}{s}]$ является полем, и x алгебраично над ним.

4.10. Пусть $R = \mathbb{Z}$ или $R = \mathbb{F}[T]$ – кольцо многочленов над полем. Докажите, что, если $u \in \dot{R}$, то $R[\frac{1}{u}]$ – не поле.

6 октября, *Г.Б. Шабат*