Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2016

5

5.1. Пусть $\mathbb{K}$ – поле, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ – его подполе и $x \in \mathbb{K}$. Пусть $u \in \mathbb{F}[x]$ и $\mathbb{F}[x, \frac{1}{u}] = \mathbb{K}$. Докажите, что $\mathbb{F}[x] = \mathbb{K}$ и что x алгебраичен над $\mathbb{F}$.

5.2. Пусть $\mathbb{K}$ – поле, $R \subseteq \mathbb{K}$ – его подкольцо и $x \in \mathbb{K}$. Пусть $u \in R[x]$ и $R[x, \frac{1}{u}] = \mathbb{K}$. Докажите, что для некоторого $s \in \dot{R}$ имеем $R[\frac{1}{s}][x] = \mathbb{K}$, что подкольцо $R[\frac{1}{s}]$ является полем и что x алгебраичен над $R[\frac{1}{s}]$.

5.3. Пусть $\mathbb{K}$ – поле, $A \subseteq \mathbb{K}$ – его подкольцо, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ и $A[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}$. Докажите, что для некоторого $s \in \dot{A}$ подкольцо $A[\frac{1}{s}]$ является полем и что $\mathbb{K}$ – его конечное расширение.

5.4. Приведите пример кольца, множество максимальных идеалов которого не плотно в его спектре.

5.5. Для произвольного поля $\Bbbk$ вложите поле рациональных функций $\Bbbk(x)$ в поле формальных рядов Лорана $\Bbbk((x))$. К какому типу расширений относится $\Bbbk((x))/\Bbbk(x)$? Какова степень трансцендентности этого расширения?

5.6*. Однозначно ли разложение на простые множители в кольце $\mathbb{Q}[[x]]$? **Совет.** Воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством.

5.7. Докажите, что поле частных кольца $\frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{\langle x^2+y^2-1, y^2+z^2-2\rangle}$ изоморфно полю частных кольца полиномиальных функций на плоской алгебраической кривой.

5.8. Докажите, что поле частных кольца $\frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{\langle x^3+y^3+z^3-1\rangle}$ изоморфно полю рациональных функций от двух переменных.

5.9. Вычислите площадь области, заключённой внутри *петли декартова листа* – вещественной кривой, заданной уравнением $y^2 = x^3 + x^2$.

5.10. Сколько точек лежит на "окружности" над конечным полем? Иначе говоря, сколько решений $(x, y) \in \mathbb{F}_q$ имеет уравнение $x^2 + y^2 = 1$?

5.11*. Сколько прямых *перегиба* имеет гладкая кубическая кривая на проективной плоскости? Имеются ли среди попарных пересечений этих прямых коллинеарные тройки? **Совет.** Рассмотрите кривую, заданную уравнением попроще – например, $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ в однородных координатах.

5.12*. Постройте гладкую проективную модель кривой, заданной в аффинных координатах уравнением $y^2 = 1 - x^5$.

20 октября, *Г.Б. Шабат*