8

Во всех задачах $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле. Для $P \neq Q \in \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ через $(P^\bullet Q)$ обозначается прямая, проходящая через P и Q. Для прямых $\ell \neq m \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ через $(\ell_\bullet m)$ обозначается единственная точка множества $\ell \bigcap m$.

8.1. Докажите *теорему Дезарга*: пусть $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ – такая шестёрка точек, что прямые $(A^\bullet A')$, $(B^\bullet B')$ и $(C^\bullet C')$ пересекаются в одной точке. Тогда точки $((A^\bullet B)_\bullet(A'^\bullet B'))$, $((A^\bullet C)_\bullet(A'^\bullet C'))$ и $((B^\bullet C)_\bullet(B'^\bullet C'))$ коллинеарны. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

8.2. Докажите *теорему Паскаля*: пусть $\mathbf{C} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ – гладкая плоская *коника* и $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{C}$ – *общая* шестёрка точек. Тогда точки $((A^\bullet B)_\bullet(D^\bullet E))$, $((B^\bullet C)_\bullet(E^\bullet F))$ и $((C^\bullet D)_\bullet(F^\bullet A))$ коллинеарны. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

8.3*. Пусть $\mathbf{C} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ – гладкая плоская *квартика* и $A, B, C, D, E \in \mathbf{C}$ – *общая* пятёрка точек. Докажите, что найдутся такие $A', B', C' \in \mathbf{C}$, что $A + B + C + D - E \equiv A' + B' + C'$.

8.4. Пусть $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 3$. Найдите прямые перегиба кубики в $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$, заданной в однородных координатах уравнением $x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$.

8.5. Докажите, что гладкая кривая рода 2 над $\Bbbk$ гиперэллиптична.

8.6*. Докажите, что существуют гладкие плоские негиперэллиптические квартики над $\Bbbk$.

8.7. (Геометрия квадратных уравнений). Пусть $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$. Реализуем $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ как проективизацию векторного пространства квадратных трёхчленов с коэффициентами из $\Bbbk$, и пусть $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ – *дискриминантная коника,* то есть множество классов пропорциональности многочленов, имеющих кратный корень. Пусть $P \in \mathbf{P}_2(\Bbbk) \setminus \mathbf{D}$; проведём из P касательные к $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$. Что можно сказать о точках касания?

8.8*. (Геометрия кубических уравнений, линейно зависящих от параметра). Пусть $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2, 3$. Реализуем $\mathbf{P}_3(\Bbbk)$ как проективизацию векторного пространства кубических многочленов с коэффициентами из $\Bbbk$, и пусть $\ell \subset \mathbf{P}_3(\Bbbk)$ – *общая* прямая. Для каждой $P \in \ell$ с корнями $\alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk$ рассмотрим в $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ треугольник с вершинами, соответствующими по конструкции задачи **8.7** многочленам с парами корней (α, β), (α, γ) и (β, γ). Докажите, что, когда P движется по ℓ, вершины этого треугольника движутся по некоторой конике.

8.9. Докажите *теорему Понселе*: если пара окружностей – вписанная и описанная для какого-нибудь треугольника, то она такова и для бесконечного множества треугольников. Одна из возможностей: воспользуйтесь предыдущей задачей.

17 ноября, *Г.Б. Шабат*