Эндоморфизм Фробениуса и оператор Картье на кривых

Фиксируем гладкую проективную кривую X. Мы будем часто задавать кривую уравнением вида $f(x,y)=0$. В этом случае подразумевается, что надо взять компактификацию аффинной кривой с уравнением $f(x,y)=0$ и разрешить особенности.

Задача 1.1. Действие Фробениуса на $H^i(X,O_X)$ полулинейно.

Задача 1.2. а) Если форма $\omega \in \Omega(X)$ равна $dh+g^p df/f$ для некоторых функций f,g,h, то $C(\omega)=gdf/f$.
б) $C(\omega)=\omega$, тогда и только тогда когда $\omega = df/f$.

Задача 1.3. Для кривой X рода g можно определить дополнительный инвариант

$$g' = \dim\{\omega \in H^0(X,\Omega_{X/k}) | \omega = dh\}.$$

Докажите, что ранг оператора Картье на пространстве $H^0(X,\Omega_{X/k})$ равен $g-g'$.

Задача 1.4. У гиперэллиптической кривой с уравнением $y^2=f(x)$ можно взять формы $x^i dx/y$ в качестве базиса. Вычислите как действует оператор Картье в этом базисе.

Задача 1.5. Когда эллиптическая кривая X с уравнением $y^2=x^3+b$ суперсингулярна (то есть Фробениус действует нулем на $H^1(X,\mathcal{O}_X)$)?

Пусть k — совершенное поле характеристики p, а I — ядро естественного отображения из $\mathbb{Z}[k^*]$ в k. Пусть $W_n(k)=\mathbb{Z}[k^*]/I^n$, и $W(k)=\varprojlim_n W_n(k)$. Пусть $[a]$ обозначает образ элемента $a \in k$ в $W(k)$. Его называют *представителем Тейхмюллера*. Определим на $W(k)$ операторы F и V на образующих формулами: $F[a]=[a^p]$ и $V[a]=p[F_k^{-1}a]$, а дальше продолжим по линейности.

Задача 1.6. а) Выполняются соотношения: $FV=VF=p$, $F(xy)=F(x)F(y)$, и $V(xFy)=Vx\cdot y$.
б) Отображение $k^* \to W(k)$, которое переводит $a\in k^*$ в $[a]$, мультипликативно.
в) Кольцо $W(k)$ является кольцом дискретного нормирования, и

$$W(k)/VW(k) \cong W(k)/pW(k) \cong k.$$

г) Любой элемент $x \in W_n(k)$ можно единственным образом записать как сумму

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} V^i[x_i],$$

где $x_i \in k$. (Предполагается, что $[0]=0$.)

Задача 1.7. а) Пусть поле k алгебраически замкнуто. Тогда отображение $M \mapsto F(M)M^{-1}$ сюрьективно на $GL_n(W(k))$.
б) Для любой обратимой матрицы M с коэффициентами из $W(k)$ найдется такая замена базиса T, что $F(T)MT^{-1}=Id$ единичная матрица.