НМУ, введение в спектральную геометрию
Экзамен 26.12.2016.

Это домашний экзамен. Решения должны быть не позднее 14 часов 26 декабря или оставлены в моей ячейке в учебной части НМУ, или оставлены на вахте у входа в НМУ, или присланы мне по электронной почте.

Шкала оценок: $\geqslant$50 баллов = 5 «отлично», $\geqslant$40 баллов = «хорошо», $\geqslant$30 баллов = «удовлетворительно».

Problem 1. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — локальный ортонормированный базис в векторных полях в окрестности точки p на многообразии M, а $c_1(t), \dots, c_n(t)$ — такие геодезические, что $c_i(0) = p$ и $c_i'(0) = e_i$. Докажите, что

$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} f(c_i(t))|_{t=0}.$$

(5 баллов).

Problem 2. Мы знаем, что спектр Дирихле области обладает свойством монотонности, то есть если $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $\lambda_i(\Omega_1) \geqslant \lambda_i(\Omega)$.

Докажите, что спектр Неймана не обладает таким свойством, то есть приведите примеры, в которых спектр а) возрастает и б) убывает, когда переходят от области к подобласти. *(10 баллов).*

Problem 3. Найдите верхнюю и нижнюю оценку первых десяти собственных чисел Дирихле области $ABCDEF$, где $A = (0,0)$, $B = (0,2)$, $C = (1,2)$, $D = (1,1)$, $E = (2,1)$, $F = (2,0)$. *(до 10 баллов в зависимости от оценок).*

Problem 4. Мы доказали теорему Фабера-Крана, утверждающую, что диск минимизирует первое собственное число Дирихле $\lambda_1(\Omega)$ среди всех плоских областей той же площади. Докажите, что два дизъюнктных диска одинакового радиуса минимизируют $\lambda_2(\Omega)$ среди всех плоских областей той же площади. *(10 баллов).*

Problem 5. Докажите, что дизъюнктное объединение n дисков одинакового радиуса не может минимизировать собственные числа Дирихле $\lambda_n(\Omega)$ для всех n *(5 баллов).*

Problem 6. Найдите константу Чигера для сферы с канонической метрикой и найдите соответствующую оценку для первого ненулевого собственного числа сферы. *(10 баллов).*

Problem 7. Докажите, что спектр квадрата со стороной длины 1 с граничным условием Дирихле на трёх сторонах и условием Неймана на оставшейся стороне совпадает со спектром прямоугольного треугольника с катетами длины $\sqrt{2}$ с граничным условием Дирихле на гипотенузе и одном катете, и граничным условием Неймана на другом катете *(10 баллов).*

Problem 8. Сконструируйте изометрическое погружение клиффордова тора в сферы, используя собственные функции Δ с собственным числом λ_1. Докажите, что метрика g_{Cl} на клиффордовом торе экстремальна для функционала $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g) = \lambda_1(\mathbb{T}^2, g)\,\mathrm{Area}(\mathbb{T}^2, g)$. Найдите значение $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g_{Cl})$ *(5 баллов).*

Problem 9. Сконструируйте подходящее изометрическое погружение клиффордова тора в сферу с помощью собственных фунцкий оператора Δ и докажите, что метрика g_{Cl} на клиффордовом торе экстремальна для бесконечного количества функционалов $\bar{\lambda}_j(\mathbb{T}^2, g) = \lambda_j(\mathbb{T}^2, g)\,\mathrm{Area}(\mathbb{T}^2, g)$. Найти как минимум три таких значения j *(10 баллов).*

Problem 10*. Используя тот же подход, что и в задаче 8, докажите, что метрика g_{eq} на равностороннем торе экстремальна для функционала $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g)$. Найдите $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g_{eq})$. Докажите, что метрика g_{Cl} на клиффордовом торе не максимальна для функционала $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g)$ *(20 points).*