Гомотопические группы

Как было выяснено в прошлом листке, $\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$. Позже будет доказано, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (а пока этим можно пользоваться без доказательства).

Задача 3.0*. Изучите (по учебнику) доказательство *теоремы Фрейденталя* о том, что надстройка индуцирует изоморфизм $\pi_k(S^n) = \pi_{k+1}(S^{n+1})$ при $k \leqslant 2n-2$ — и, как следствие, $\pi_n(S^n) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Задача 3.1. Вычислите все гомотопические группы пространства а) $\mathbb{R}P^\infty$; б) $\mathbb{C}P^\infty$.

Задача 3.2. У пространств $\mathbb{R}P^m \times S^n$ и $\mathbb{R}P^n \times S^m$ совпадают все гомотопические группы. (Позже мы увидим, что они, тем не менее, гомотопически не эквивалентны.)

Можно доказать, что если изоморфизм всех гомотопических групп клеточных пространств X и Y *индуцируется некоторым отображением* $X \to Y$, то X и Y гомотопически эквивалентны.

Задача 3.3. а) $\pi_k(S^n \vee S^m) \cong \pi_k(S^n) \oplus \pi_k(S^m)$ при $k < n+m-1$; б) $\pi_n((S^n)^{\vee l}) \cong \mathbb{Z}^l$.
в) $\pi_n(S^1 \vee S^n) \cong \mathbb{Z}[\gamma, \gamma^{-1}]$.

* * *

Задача 3.4. а) Убедитесь, что гомотопическая последовательность расслоения

$$\ldots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \ldots$$

точна в члене $\pi_n(B)$.
б) Убедитесь, что гомотопическая последовательность пары

$$\ldots \to \pi_n(A) \to \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A) \to \ldots$$

точна в члене $\pi_n(X, A)$.

Задача 3.5. а) Если у расслоения $F \to E \to B$ есть сечение, то $\pi_n(E) \cong \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$.
б) Если A — ретракт пространства X, то $\pi_n(A)$ — прямое слагаемое в $\pi_n(X)$.

Задача 3.6. $\mathbb{R}P^n$ невозможно ретрагировать на $\mathbb{R}P^k$.

Задача 3.7. а) Если S^{n+k} расслаивается над S^n со слоем S^k, то $k = n-1$.
б) $\pi_n(S^4) \cong \pi_n(S^7) \oplus \pi_{n-1}(S^3)$; в частности, $\pi_7(S^4)$ содержит $\mathbb{Z}$ в качестве прямого слагаемого.

Можно показать, что группы $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ и $\pi_n(S^n)$ всегда имеют ранг 1, а все остальные гомотопические группы сфер состоят из кручения.

* * *

Задача 3.8. а) Если A — стягиваемый подкомплекс CW-комплекса X, то $X \cong X/A$.
б) Приведите пример такого топологического пространства X и его стягиваемого подпространства A, что пространства X и X/A гомотопически не эквивалентны.

Задача 3.9. Если X — *n-связное* клеточное пространство (т. е. X связно и $\pi_{\leqslant n}(X) = 0$), то X гомотопически эквивалентно пространству с одной 0-мерной клеткой и без клеток размерностей $1, \ldots, n$.