Домашний экзамен (сдаётся до 18.12.18)

Задача 1. а) Опишите все двухсторонние идеалы конечной коразмерности в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$. В качестве ответа ожидается что-то типа разбиения. (Подсказка: категория конечномерных $\mathfrak{sl}(2)$-модулей полупроста).
б) Докажите, что $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))[e^{-1}] \cong \mathbb{C}[x, \frac{1}{x}, \partial_x; z]$, где $[z, x] = 0$ и $[z, \partial_x] = 0$.
в) Используя б), докажите, что любой двухсторонний идеал в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$ имеет вид $p(z)J$, где J — это идеал конечной коразмерности в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$, p — многочлен от одной переменной, $z = h^2 + 2(ef + fe)$.
г) Объясните когда идеалы из в) равны.

Задача 2. Сколько есть неприводимых компонент у многообразия нильпотентных верхнетреугольных матриц 6 на 6 с жордановой нормальной формой, задаваемой разбиением $3, 2, 1$? (Комментарий: в лекциях ответ дан без доказательства, а в экзамене я доказательство хочу увидеть)

Задача 3. Опишите все старшие веса для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{sl}(10)$, диаграммы Юнга, соответствующие которым а) и б):

а) содержат не более 2 строк в сумме,
б) одна из этих строк имеет длину 1.

Как эти веса разбиваются на левые клетки? Сколько элементов в этих клетках?

Задача 4. Найдите полиномы Каждана-Люстига для $B_2 = C_2$.

Задача 5*. Какие из модулей старшего веса, заданных весами из задачи 3, лежат в блоке $\mathcal{O}^0$? Как на этих модулях действуют проективные функторы $F_{0,w\rho-\rho}$, $w \in W$? (Подсказка: любой неразложимый проективный функтор есть композиция функторов трансляции, а про функторы трансляции много чего полезного написано в Хамфрисе)

Задача 6. а) Выпишите левые, правые, двухсторонние клетки блока $\mathcal{O}^0$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(4)$). (Я ожидаю увидеть в виде ответа несколько таблиц (двухсторонних клеток), строки в которых — это левые клетки, а столбцы — правые).
б) Выделите внутри своего ответа простые модули, соответствующие инволюциям в группе Вейля.
в) Объясните как интерпретировать обобщённый τ-инвариант как раскрашенный граф с выделенной вершиной. Какие примитивные идеалы из а) разделяются τ-инвариантом, а какие не разделяются? Какие примитивные идеалы из а) разделяются обобщённым τ-инвариантом, а какие не разделяются?

Задача 7. Найдите базисные алгебры всех блоков категории $\mathcal{O}$ для $\mathfrak{sl}(2)$. (Совет: используйте науку про функторы трансляции и Хамфриса)

Задача 8. Укажите алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, для которых пара функторов локализация-глобальные сечения

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})/m_\lambda \leftrightarrow D^\lambda(G/B)$$

не является эквивалентностью категорий.

Задача 9. Обозначим через алгебру дифференциальных операторов $\mathbb{C}[x_1, ..., x_{10}, \partial_1, ..., \partial_{10}]$. Обозначим $\mathbb{C}[x_1, \frac{1}{x_1}, ..., x_{10}, \frac{1}{x_{10}}]$ через M. Легко видеть, что M является D-модулем.
а) Найдите все простые D-подфакторы M.
б) Проверьте, что отображение $\alpha : e_{ij} \to x_i \partial_j$ продолжается до отображения $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(10)) \to D$ (таким образом, любой D-модуль является также и $\mathfrak{sl}(10)$-модулем).
в) Проверьте, что все подфакторы из а) просты как $\mathfrak{sl}(10)$-модули.
г) Докажите, что все подфакторы из а) являются модулями старшего веса для подходящей борелевской подалгебры $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{sl}(10)$.
д) Использую это, докажите, что аннуляторы модулей старшего весов, заданных последовательностями

$$-1, ..., -1(i \text{ штук }), (i - 10), 0, 0, ...(9 - i \text{ штук}), \quad 0 \le i \le n - 1,$$

совпадают для всех $i \le n - 1$.

Гугление, чтение тех или иных статей или книг, а так же совещание с теми или иными людьми — приветствуется. Но **писать** всё надо — своими руками.

Удачи!