Независимый Московский Университет, Алгебра-1, осень 2018

7

Пусть X и Y – два множества. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$, и *сюръективным*, если для любого $y \in Y$ найдётся такой $x \in X$, что $f(x) = y$.

7.1. Докажите, что ни для какого множества X не существует сюръективного отображения $X \to \mathrm{Sub}(X)$. **Совет.** Воспользуйтесь *парадоксом брадобрея.*

7.2. Докажите, что ни для какого множества X не существует инъективного отображения $\mathrm{Sub}(X) \to X$. **Совет.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

7.3. Докажите, что инъективность отображения $\iota : X \to Y$ равносильна *сократимости* ι *слева*, то есть следующему свойству этого отображения: *для любого множества* Z *и любых двух отображений* $\alpha_1, \alpha_2 : Z \to X$ *из равенства* $\iota \circ \alpha_1 = \iota \circ \alpha_2$ *следует равенство* $\alpha_1 = alpha_2$.

7.4. Докажите, что сюръективность отображения $\sigma : X \to Y$ равносильна *сократимости* σ *справа*, то есть следующему свойству этого отображения: *для любого множества* Z *и любых двух отображений* $\alpha_1, \alpha_2 : Y \to Z$ *из равенства* $\alpha_1 \circ \sigma = \alpha_2 \circ \sigma$ *следует равенство* $\alpha_1 = \alpha_2$.

Задачи **7.3** и **7.4** позволяют перенести понятия инъективного и сюръективного отображения из категории множеств в произвольную категорию. Сократимые слева морфизмы называются *мономорфизмами*, а сократимые справа – *эпиморфизмами*.

7.5. Докажите, что в категории множеств мономорфность равносильна *обратимости слева*. Распространяется ли этот результат на произвольные категории?

7.6. Докажите, что в категории множеств эпиморфность равносильна *обратимости справа*. Распространяется ли этот результат на произвольные категории?

7.7. Докажите, что в категории множеств каждый морфизм является композицией мономорфизма и эпиморфизма. Распространяется ли этот результат на произвольные категории?

7.8. Магма $(M, *)$ называется *квазигруппой*, если для любых $a, b \in M$ уравнения $a * x = b$ и $x * a = b$ однозначно разрешимы. Всякая ли квазигруппа является группой?

1 ноября, *Г.Б. Шабат*