

8

8.1. Для множеств X, Y определим отображение

$$\text{Aut}(X) \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{SET}}(Y^X) : g \mapsto (\varphi : x \mapsto \varphi(g^{-1} \cdot x)).$$

Проверьте, что это отображение определяет *действие* группы $\text{Aut}(X)$ на множестве Y^X . Можно ли в приведённом определении заменить g^{-1} на g ?

8.2. Для множеств X, Y определим отображение

$$\text{Aut}(Y) \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{SET}}(Y^X) : g \mapsto (\varphi : x \mapsto g \cdot \varphi(x)).$$

Проверьте, что это отображение определяет *действие* группы $\text{Aut}(X)$ на множестве Y^X . Можно ли в приведённом определении заменить $g \cdot \varphi(x)$ на $g^{-1} \cdot \varphi(x)$?

8.3. Для множеств X, Y обозначим $\text{Inj}(X, Y) \subseteq Y^X$ множество *инъективных* отображений из X в Y . В случае конечного Y вычислите $\#\text{Inj}(X, Y)$. Составьте таблицу $\#\text{Inj}(X, Y)$ при $\#Y \leq 10$. **Совет.** Воспользуйтесь *формулой орбит*.

8.4*. Для множеств X, Y обозначим $\text{Sur}(X, Y) \subseteq Y^X$ множество *сюръективных* отображений из X в Y . В случае конечных X найдите какие-либо выражения (*рекуррэнции...*) для чисел $\#\text{Sur}(X, Y)$. Составьте таблицу $\#\text{Sur}(X, Y)$ при $\#X \leq 10$. **Совет.** Пользуясь любыми источниками информации, разберитесь в *числах Стирлинга*.

8.5. Докажите, что все графики вещественных квадратных трёхчленов получаются друг из друга сдвигами, растяжениями и отражениями.

8.6. Докажите, что все графики вещественных кубических четырёхчленов центрально симметричны.

8.7. Докажите, что при любых $a, b \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ все графики вещественных функций $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ получаются друг из друга сдвигами и растяжениями по оси абсцисс и растяжениями по оси ординат.

8.8. Докажите, что группа преобразований подобия комплексной плоскости $\text{Aff}_1(\mathbb{C}) := \{z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}\}$ является *полупрямым произведением* подгруппы сдвигов $\{z \mapsto z + b \mid b \in \mathbb{C}\}$ и подгруппы растяжений $\{z \mapsto az \mid a \in \mathbb{C}^\times\}$. Нормальна ли подгруппа сдвигов в $\text{Aff}_1(\mathbb{C})$? Нормальна ли подгруппа растяжений?

8.9*. Попытайтесь распространить результаты предыдущей задачи на преобразования *кватернионов*, отдельно рассмотрев преобразования $\{q \mapsto aq + b\}$ и $\{q \mapsto qa + b\}$. Какие подгруппы этих групп преобразований сохраняют *мнимые* кватернионы? Знакомы ли они вам?

8 ноября, Г.Б. Шабат