Старшие производные

10◇1. Покажите, что для линейного отображения $f\colon A \to B$ нормированных векторных пространств следующие условия эквивалентны:

- f непрерывно в нуле;
- f непрерывно на всём A;
- $\|f(a)\|$ ограничена на единичном шаре $\|a\| \leqslant 1$.

10◇2. Покажите что если A векторное нормированное, а B банахово, то пространство непрерывных линейных отображений $L(A, B)$ тоже банахово.

10◇3. Покажите, что на конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны.

10◇4. Покажите, что естественный изоморфизм $L(A; L(B; C)) \cong L(A, B; C)$ является изометрией (в обозначениях лекции $\|\varphi(f)\| = \|f\|, \|\psi(g)\| = \|g\|$), где $L(A, B; C)$ — пространство билинейных отображений из $A \times B$ в C.

10◇5. Приведите пример функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, у которой в точке (x_0, y_0) существуют не равные друг другу смешанные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

10◇6. а) Пусть V конечномерное нормированное пространство, отображение $f\colon A \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируемо в точке $0 \in V$, его производная $f'(0)$ равна нулю, а вторая производная $f''(0)$ положительно определённая билинейная форма (то есть $[f''(0)](v, v) > 0\ \forall v \in V$). Покажите, что точка нуль является локальным минимумом отображения f.
б) Постройте контрпример в случая, когда V бесконечномерно.

10◇7. Найдите и классифицируйте все критические точки функции

$$f(x, y) = 12x^3 + y^3 + 12x^2 y - 75y + 1.$$

10◇8. Для дважды дифференцируемой на $\mathbb{R}^2$ функции f выразите $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ через производные в полярных координатах (r, φ) и найдите решения уравнения $\Delta f(r, \varphi) = 0$, зависящие только от r.

10◇9. Может ли дифференцируемая функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ иметь ровно три критические точки, из которых одна локальный минимум, одна локальный максимум и одна седловая?