Компактные пространства

6◇1. Открытое подмножество $\mathbb{R}$ является не более чем счётным объединением интервалов.

6◇2. Покажите, что множество с топологией конечных дополнений компактно, найдите все его компактные подмножества.

6◇3. Докажите, что для всякой непрерывной функции $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ найдётся пара антиподальных точек в которых её значения равны.

6◇4. Покажите, что проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (сфера S^n с индуцированной из $\mathbb{R}^{n+1}$ топологией и отождествлёнными антиподальными точками) компактно.

6◇5. Для топологического пространства $(X, \mathscr{F})$ и элемента $\infty \notin X$ определим топологическое пространство $(X^\infty, \mathscr{F}^\infty)$ положив $X^\infty = X \cup \{\infty\}$, а $\mathscr{F}^\infty = \mathscr{F} \cup \big\{V \cup \{\infty\}\big\}$, где V — такое подмножество X, что $X \setminus V$ компактно и замкнуто в X. Покажите, что $\mathscr{F}^\infty$ — топология и X^∞ компактно.

6◇6. Покажите, что если $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то найдутся такие $R > 0$ и $\pi/2 > \varphi > 0$, что для любой точки графика $f(x)$ его пересечение с кругом радиуса R нигде кроме центра не будет пересекаться диаметрами наклонёнными на $\pm\varphi$.

6◇7. Покажите, что у непересекающихся компактов в хаусдорфовом пространстве существуют непересекающиеся окрестности.

6◇8. Покажите, что прямое произведение двух топологических пространств компактно тогда и только тогда, когда каждое из них компактно.

6◇9. Будет ли отрезок $[0,1]$ компактен в топологии $\mathscr{F} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall s \in U\ \exists t > s : [s,t) \in U\}$?

6◇10. Рассмотрим на пространстве $\mathcal{C}$ непрерывных функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ набор подмножеств

$$\mathscr{S} = \big\{F(K,U) = \{f \in \mathcal{C} : f(K) \subset U\} | K \text{ компактно, } U \text{ открыто}\big\}.$$

Покажите, что набор всевозможных конечных пересечений множеств из $\mathscr{S}$ образует базу некоторой топологии. Проверьте, что получившуюся на $\mathcal{C}$ топологию можно задать метрикой $\rho(f,g) = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.