НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 6.
Подмногообразия. Многообразия с краем. 22.10.2019.

Задача 1. Пусть M многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p\iota : T_pN \longrightarrow T_{\iota(p)}M$ изоморфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_pN$ с $d_p\iota(X) \in T_{\iota(p)}M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N, подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)}N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$.

Докажите, что коммутатор двух векторных полей на M, касательных к подмногообразию N, — тоже векторное поле, касательное к N.

Задача 2. Пусть $N \subset M$ подмногообразие. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$, такую, что $\gamma((a,b)) \subset N$. Покажите, что не обязательно $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}N$ для каждого $t \in (a,b)$.

Задача 3. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}$ как $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i\alpha t})$, где α — иррациональное число. Докажите, что $(\mathbb{R},\varphi)$ — плотное подмногообразие в $\mathbb{T}$ (оно называется плотной обмоткой тора). Это подмногообразие вложенное?

Задача 4. Доказать, что замкнутая верхняя полусфера

$$\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0\}$$

является многообразием с краем.

Задача 5. Является ли открытый диск $\mathrm{Int}D^2 = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ многообразием с краем?

Задача 6. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ определено формулой

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Для каких из точек $p = (0,0)$, $p = (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $p = (-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ множество $f^{-1}(f(p))$ будет вложенным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$?

Задача 7. Является ли $\mathrm{SL}(n)$ подмногообразием $\mathrm{GL}(n)$? Вложенным подмногоoразием? Погружённым подмногообразием?

Задача 8. Построить пример такой поверхности Σ в $\mathbb{R}^n$, что её сечение $\Sigma \cap H$ некоторой гиперплоскостью $H \subset \mathbb{R}^n$ не является подмногообразием.

Задача 9*. Пусть M — гладкое многообразие и A — подмножество в M. Фиксируем топологию на A. Тогда на A существует не более одной структуры гладкого многообразия, такой, что (A,i) — подмногообразие в M, где i — отображение вложения.

Задача 10*. Пусть снова A — подмножество в M. Если в индуцированной топологии A обладает структурой гладкого многообразия, такой, что (A,i) — подмногообразие M, то на A существует единственная структура многообразия, то есть единственная локально евклидова топология с второй аксиомой счётности и единственная дифференцируемая структура, такая, что (A,i) — подмногообразие в M.