ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Теорема Брауэра. Степень отображения. n-я гомотопическая группа; вычисление $\pi_n(S^n)$.

В этой лекции основное кольцо $K = \mathbb{Z}$, если не указано иное.

Замечание. Доказательство равенства $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, данное в лекции 3–4, позволяет указать явно образующую этой группы. А именно, если $x_{n-1} \in C_{n-1}(S^{n-1})$ — цикл, для которого $[x_{n-1}] = 1 \in H_{n-1}(S^{n-1})$, то $[x_{n-1}] = \delta([x_n])$, где $x_n \in C_n(S^n)$ — цикл, для которого $[x_n] = 1 \in H_n(S^n)$, а $\delta : H_n(S^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ — гомоморофизм из теоремы Бокштейна.

Пусть теперь $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ (для произвольного m) — сфера единичного радиуса с центром в начале координат, а $f : \Delta_k \to S^{n-1}$ — произвольный сингулярный k-симплекс: $f(x_0, \dots, x_k) = (y_0(x), \dots, y_{n-1}(x))$, где $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, \dots, x_k)$, $x_0 + \dots + x_{n-1} = 1$ и $y_0^2(x) + \dots + y_{n-1}(x) = 1$. Обозначим $\Sigma f : \Delta_{k+1} \to S^n$ сингулярный симплекс, заданный равенством $\Sigma f(x_0, \dots, x_{k+1}) = (\sqrt{1 - x_{k+1}^2} y_0(x_0, \dots, x_k), \dots, \sqrt{1 - x_{k+1}^2} y_{n-1}(x_0, \dots, x_k), x_{k+1}) \in S^n$. Как нетрудно видеть, Σ — морфизм комплексов: $\partial \Sigma(f) = \Sigma \partial f$ для любого f (он называется морфизмом надстройки). Явная конструкция точной последовательности Бокштейна показывает (убедитесь!), что $x_n = \Sigma x_{n-1}$. Индукция показывает, что x_n будет суммой, с единичными коэффициентами, симплексов — граней выпуклого многогранника, двойственного к n-мерному кубу; но нам столь точное описание образующей группы $H_n(S^n)$, вероятно, не понадобится.

Теорема 1 (теорема Брауэра). *Непрерывное отображение $f : D_k \to D_k$ шара в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть это неверно: для всех $x \in D_k$ точки x и $f(x)$ не совпадают. Проведем через точку x луч с началом в точке $f(x)$ и обозначим $u(x)$ точку его пересечения с границей шара $\partial D_k = S^{k-1}$. Отображение u непрерывно (почему?) и, следовательно, — ретрация $D_k \to \partial D_k$.

Пусть $\iota : S^{k-1} \to D_k$ — тавтологическое вложение сферы в шар в качестве границы. Тогда $u \circ \iota = \mathrm{id}_{S^{k-1}}$ и, следовательно, $u_* \circ \iota_* = \mathrm{id}_{H_{k-1}(S^{k-1})}$. Но шар D_k стягиваем и, следовательно, $H_{k-1}(D_k) = 0$, так что $\iota_* : H_{k-1}(S^{k-1}) \to H_{k-1}(D_k)$ — нулевое отображение. Отсюда вытекает, что отображение $u_* \circ \iota_*$ также нулевое, но это невозможно, т.к. $H_{k-1}(S^{k-1}) \neq 0$. □

Обобщение равенства $H_n(S^n, K) = K$:

Пример 1. Пусть $X = S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_p}$ — букет сфер, тогда $H_0(X) = K$ и $H_n(X) = K^{\alpha_n}$ при $n > 0$, где $\alpha_n = \#\{i \mid n_i = n\}$. Доказательство также проводится с помощью последовательности Майера–Виеториса: в качестве A следует взять букет с выкинутой вершиной, в качестве B — букет, в котором из каждой сферы выколота точка. Тогда B стягиваем, а A гомотопически эквивалентен набору из p точек; $A \cap B$ гомотопически эквивалентно несвязному объединению сфер размерностей $n_1 - 1, \dots, n_p - 1$. Очевидно, образующими $H_n(X)$ будут такие же циклы, как в случае сферы, в каждой из сфер размерности n, входящих в букет.

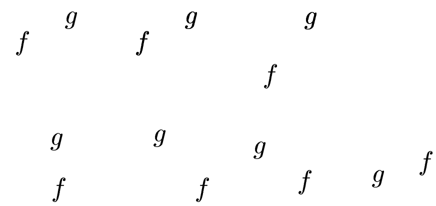
Для произвольного непрерывного отображения $f : S^n \to S^n$ определен гомоморфизм $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$. Зафиксируем изоморфизм $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (это сводится к выбору одной из двух возможных образующих группы в качестве 1 и называется выбором ориентации сферы). Число $\deg f \stackrel{\text{def}}{=} f_*(1) \in \mathbb{Z}$ называется степенью отображения f; гомоморфизм $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ теперь действует по правилу $f_*(x) = x \deg f$. Поскольку f_* — гомотопический инвариант, степени гомотопных отображений сфер совпадают.

Пусть X — топологическое пространство, $b \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Определим *n-ую гомотопическую группу* $\pi_n(X, b)$, элементы которой — всевозможные классы гомотопии непрерывных отображений $f : [0,1]^n \to X$ таких, что $f(\partial [0,1]^n) = b$ (при гомотопии последнее условие тоже должно сохраняться). Произведение классов гомотопии u и v определяется так: берутся произвольные представители $f \in u$ и $g \in v$ этих классов и в качестве uv берется класс гомотопии отображения $(fg)(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n), & 0 \le x_1 \le 1/2, \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & 1/2 \le x_1 \le 1. \end{cases}$

При $n = 1$ гомотопическая группа это фундаментальная группа.

Лемма 1. *Определение умножения в $\pi_n(X, b)$ корректно (не зависит от выбора представителей классов) и задает в $\pi_n(X, b)$ структуру группы. При $n \ge 2$ эта группа коммутативна.*

Доказательство. Доказательство первого утверждения — такое же, как для фундаментальной группы.
Коммутативность $\pi_n(X, b)$ означает, что отображения fg и gf для произвольных f и g гомотопны. Гомотопия при $n = 2$ показана на рисунке (заштрихованные области отображаются в отмеченную точку b); при произвольном $n \geq 2$ конструкция такая же. $\square$



Поскольку вся граница $\partial[0,1]^n$ куба переходит при отображении f в одну точку, f можно считать отображением куба, все точки границы которого склеены в одну точку p_0, в пространство X, причем $f(p_0) = b$. Куб $[0,1]^n$, граница которого склеена в точку, гомеоморфен сфере S^n. Таким образом, $\pi_n(X, b)$ можно определить как множество классов гомотопии отображений $S^n \to X$, переводящих отмеченную точку $p_0 \in S^n$ в b (такие отображения называются сфероидами).

В терминах сфероидов операция в $\pi_n(X, b)$ выглядит так: пусть $\psi : S^n \to S^n \vee S^n$ — отображение, переводящее экватор сферы в вершину букета, а северное и южное полушарие — гомеоморфно в первую и вторую сферы соответственно. Если $f_1, f_2 : S^n \to X$ — сфероиды, то обозначим $f_1 \vee f_2 : S^n \vee S^n \to X$ отображение, ограничение которого на первую сферу равно f_1, а на вторую — f_2; вершина букета переходит в отмеченную точку. Тогда суммой классов гомотопии, которым принадлежат сфероиды f_1 и f_2, будет класс гомотопии сфероида $(f_1 \vee f_2) \circ \psi : S^n \to X$.

Пусть X — букет p сфер размерности n, Y — букет q таких же сфер, $u_i : S^n \to X$ — вложение ($i = 1, \ldots, q$), переводящее S^n гомеоморфно в i-ю сферу букета, $v_j : Y \to S^n$ — проекция, переводящая j-ю сферу гомеоморфно в S^n, а остальные — в отмеченную точку.

Теорема 2. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Обозначим d_{ij} степень отображения $v_j \circ f \circ u_i : S^n \to S^n$. Тогда гомоморфизм $f_* : \mathbb{Z}^p = H_n(X) \to H_n(Y) = \mathbb{Z}^q$ в стандартном базисе представляет собой умножение на матрицу (d_{ij}).*

Доказательство. Любой гомоморфизм $K^p \to K^q$ представляет собой умножение на матрицу с элементами из K. Отображение u_i переводит образующую $H_n(S^n) = K$ в i-ю образующую $H_n(X) = K^p$, так что $(u_i)_* = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ (столбец высотой p, единица на i-ом месте). Аналогично $(v_j)_* = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (строка длиной q, единица на j-м месте).

Для произвольного $f : X \to Y$ теперь $(u_i \circ f \circ v_j)_* = (u_i)_* f_* (v_j)_*$ — (i, j)-ый элемент матрицы f_*; он равен степени отображения $u_i \circ f \circ v_j$, то есть d_{ij}. $\square$

Сопоставим теперь произвольному элементу $u \in \pi_n(S_n, b)$ (с произвольной точкой b) число $\deg u$.

Следствие 1. $\deg(u+v) = \deg u + \deg v$, *а* $\deg \mathrm{e} = 1$, *где* $e \in \pi_n(S_n, b)$ *— единица группы. Отсюда вытекает, что* $\deg$ *является эпиморфизмом* $\pi_n(S^n, b) \to \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть f, g — сфероиды, представляющие классы u и v соответственно. Обозначим $f \oplus g : S^n \vee S^n \to S^n \vee S^n$ отображение, ограничение которого на первую сферу букета есть f, на вторую g, при этом первая сфера переходит в первую, а вторая во вторую. По теореме 2 матрица отображения $(f \oplus g)_*$ — диагональная, на диагонали стоят $\deg u$ и $\deg v$ соответственно. Пусть также $\varphi : S^n \vee S^n \to S^n$ — отображение, переводящее каждую из сфер букета в сферу-образ гомеоморфно; вершина букета переходит в отмеченную точку $b \in S^n$. Матрица отображения φ_* равна $(1, 1)$.

Очевидно, $f \vee g = \varphi \circ (f \oplus g)$; тогда матрица отображения $(f \vee g)_*$ равна $(\deg u, \deg v)$. В то же время матрица отображения ψ_* равна $(1, 1)^T$, откуда и вытекает первое утверждение.

Вторая утверждение очевидно. $\square$

Вложим S^{n-1} в S^n в качестве экватора и соединим каждую точку экватора дугами большого круга (меридианами) с полюсами. Теперь у каждой точки $c \in S^n$ имеется широта $\psi(c) \in [-\pi/2, +\pi/2])$ и, если c не является полюсом, долгота $\varphi(c) \in S^{n-1}$. Произвольному непрерывному отображению $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ можно сопоставить его надстройку — отображение $\Sigma g : S^n \to S^n$ такое, что $\varphi(\Sigma g(c)) = g(\varphi(c))$ и $\psi(\Sigma g(c)) = \psi(c)$ (полюсы переходят в себя). Очевидно, что если g_0 гомотопно g_1, то Σg_0 гомотопно Σg_1, так что Σ является отображением $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \to \pi_n(S^n)$; нетрудно проверить, что это гомоморфизм групп.

Теорема 3. Σ *является эпиморфизмом.*

Лемма 2. *Пусть Z — любое топологическое пространство, а $f_0, f_1 : X \to S^n$ — два непрерывных отображения таких, что для всякого $x \in X$ точки $f_0(x)$ и $f_1(x)$ не являются диаметрально противоположными. Тогда отображения f_0 и f_1 гомотопны.*

Доказательство. Соединим $f_0(x)$ и $f_1(x)$ кратчайшей кривой (дугой большого круга на S^n); поскольку точки не являются диаметрально противоположными, эта дуга единственна. Пусть $f_t(x)$ — точка этой дуги, делящая ее в отношении $t : (1-t)$, считая от точки $f_0(x)$. Семейство отображений f_t, $0 \leq t \leq 1$, — искомая гомотопия. $\square$

Доказательство теоремы 3. Назовем триангуляцией сферы S^n (которую мы будем считать сферой единичного радиуса с центром в начале координат) конечный набор точек $a_1, \dots, a_N \in S^n$ таких, что $0 \in \mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ и каждая грань $\mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ является симплексом (гранью триангуляции). Непрерывное отображение $f : S^n \to \mathbb{R}^m$ называется кусочно-линейным, если найдется триангуляция сферы $a_1, \dots, a_N$, и для каждой грани $\Phi \subset \mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ — аффинное отображение $F_\Phi : \Phi \to \mathbb{R}^m$ такое, что $f|_{p^{-1}(\Phi)} = F_\Phi \circ p$; здесь $p : S^n \to \mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ — проекция из начала координат. Тем самым $f(a_i) = F_\Phi(a_i)$, где Φ — любая грань, которой принадлежит вершина a_i; поскольку аффинное отображение симплекса однозначно задается образами его вершин, кусочно-линейное отображение сферы однозначно задается триангуляцией $a_1, \dots, a_N \in S^n$ и образами $f(a_i) \in \mathbb{R}^m$.

Произвольное непрерывное отображение $f : S^n \to S^n$ равномерно непрерывно (сфера — компакт), так что существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $|x - y| < \varepsilon$, то $|f(x) - f(y)| < 1/4$ и, следовательно, точки $f(x)$ и $f(y)$ не противоположны. Пусть $a_1, \dots, a_N \in S^n$ — триангуляция, для которой расстояние между вершинами одной грани не больше ε (такую можно построить, например, путем многократного барицентрического подразделения произвольной триангуляции). Пусть теперь g — кусочно-линейное отображение, совпадающее с f в точках $a_1, \dots, a_N$. Тогда в силу выбора точек образ g не содержит начала координат и определено отображение $F : S^k \to S^n$ — композиция g с проекцией из начала координат на сферу S^n. Очевидно, для всякого $a \in S^k$ расстояние между точками $f(a)$ и $F(a)$ не превышает четверти большого круга сферы S^n — следовательно, по лемме 2, отображения F и f гомотопны. Для краткости будем называть отображения типа F (композиции кусочно-линейного и проекции из начала координат на сферу) "кусочно-линейное отображение сфер".

Тем самым можно произвольное непрерывное отображение $f : S^n \to S^n$ заменить гомотопным ему кусочно-линейным; мы его тоже обозначим f. Прообразы полюсов a и b сферы при кусочно-линейном отображении f состоят из конечного числа точек: $f^{-1}(a) = \{u_1, \dots, u_s\}$ и $f^{-1}(b) = \{v_1, \dots, v_r\}$. Существует семейство (постройте!) $\mu_t : S^n \to S^n$, $0 \le t \le 1$ гомеоморфизмов сферы в себя, для которого $\mu_0 = \mathrm{id}$, а $\mu_1(u_i)$ лежит в северном полушарии, и $\mu_1(v_i)$ — в южном. Отображение $f \circ \mu_1$ гомотопно f и обладает таким свойством: прообразы a и b лежат в северном и южном полушарии соответственно. Мы обозначим $f \circ \mu_1$ опять f.

Рассмотрим "полярные шапочки" $U \ni a$ и $V \ni b$ такие, что $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ не пересекаются с экватором сферы-прообраза — они существуют, потому что экватор замкнут и его образ не содержит a и b. Существует (постройте!) семейство непрерывных отображений $\nu_t : S^n \to S^n$, $0 \le t \le 1$, такое что $\nu_0 = \mathrm{id}$, $\nu_t(c) = c$ при всех t для каждой точки c, лежащей на экваторе сферы-образа S^n, и ν_t отображает U на все северное полушарие, а V — на все южное. Отображение $\nu_1 \circ f$ гомотопно f (и будет теперь обозначаться f), переводит экватор S^n в экватор, северное полушарие в северное, а южное в южное. Еще одной гомотопией можно добиться (как?), чтобы отображение f переводило северный полюс в северный, а южный — в южный.

Построим теперь гомотопию $\xi_t : S^n \to S^n$, $0 \le t \le 1$, заданную в координатах "широта-долгота" следующим образом. Пусть в этих координатах построенное выше отображение есть $f(\psi, \varphi) = (g(\psi, \varphi), h(\psi, \varphi))$; для него $g(0, \varphi) = 0$, $g(\pm\pi/2, \varphi) = \pm\pi/2$. Тогда положим

$$\xi_t(\psi, \varphi) = \begin{cases} \big(\psi, h(0, \varphi)\big), & -\pi t/2 \le \psi \le \pi t/2 \\ \big((1-t) g(\frac{\psi - \pi t/2}{1-t}, \varphi) + \frac{\pi t}{2}, h(\frac{\psi - \pi t/2}{1-t}, \varphi)\big), & \pi t/2 \le \psi \le \pi/2, \end{cases}$$

при отрицательном ψ аналогично. Тогда $\xi_0 = f$, ξ_1 — надстройка над ограничением f на экватор сферы. Тем самым всякое отображение $f : S^n \to S^n$ гомотопно надстройке, и Σ — эпиморфизм. $\square$

Теорема 4. $\pi_n(S^n, b) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Индукция по n: база $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ известна, и пусть $\pi_{n-1}(S^{n-1}, b) = \mathbb{Z}$ уже доказано. Согласно теореме 3, существует эпиморфизм $\Sigma : \mathbb{Z} \to \pi_n(S^n, b)$, откуда $\pi_n(S^n, b) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, согласно следствию 1, существут эпиморфизм $\pi_n(S^n, b) \to \mathbb{Z}$. Если $k \ne 0$, то группа $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ конечная, и такое невозможно. Значит, $k = 0$ и $\pi_n(S^n, b) = \mathbb{Z}$. $\square$