ГОМОЛОГИИ ГРАФОВ

Задача 1. а) Вычислите гомологии букета n окружностей. б) Пусть граф B — букет двух окружностей ω_1, ω_2, а граф A содержит две вершины v_1, v_2, соединенные двумя ребрами e_1, e_2, и в каждой вершине — петля (соответственно, h_1 и h_2). Отображение $f : A \to B$ переводит v_1, v_2 в вершину букета, ребра e_1 и h_1 — в ω_1, а ребра e_2 и h_2 — в ω_2. (Все отображения "линейные": точка, отстоящая на расстояние x от конца ребра, переходит в точку соответствующей окружности, находящуюся на том же расстоянии от вершины букета, считая против часовой стрелки). Вычислите $H_*(A, K)$ и $H_*(B, K)$ и гомоморфизм $f_* : H_*(A, K) \to H_*(B, K)$.

Задача 2 (продолжение задачи 1)**.** Пусть граф B — букет двух окружностей, а $f : A \to B$ — трехлистное накрытие. Найдите гомологии графа A и отображение $f_* : H_*(A, K) \to H_*(B, K)$.

Указание. Рассмотрите все случаи. K — коммутатитвное ассоциативное кольцо.

Задача 3. а) Граф Γ/e получен из графа Γ стягиванием ребра e, не являющегося петлей. Пусть $f : \Gamma \to \Gamma/e$ — отображение факторизации. Докажите явно, что $f_* : H_*(\Gamma) \to H_*(\Gamma/e)$ — изоморфизм. б) Граф Γ содержит n вершин, m ребер и c компонент связности. Докажите, что $H_1(\Gamma, K) = K^{m-n+c}$.

Пусть G — группа, $x_1, \ldots, x_n \in G$ — набор ее элементов. *Графом Кэли* $C(G; x_1, \ldots, x_n)$ называется граф, вершины которого — элементы G, а две вершины $p, q \in G$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $p = qx_i^{\pm 1}$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, граф Кэли связен тогда и только тогда, когда $x_1, \ldots, x_n$ — образующие группы G.

Задача 4. Найдите гомологии $H_*(C(G; x_1, \ldots, x_n))$ графов Кэли и явный базис в $H_1(C(G; x_1, \ldots, x_n))$, где а) $G = S_3$, $x_1 = (12), x_2 = (23)$; б) $G = S_4$, $x_1 = (12), x_2 = (23), x_3 = (34)$.

Нетопологический пример:

Задача 5 (когомологии групп)**.** Пусть G — группа. n-коцепями со значением в модуле K называются функции $f : G^n \to K$; их множество обозначается $C^n(G; K)$. Дифференциал $d : C^n(G; K) \to C^{n+1}(G; K)$ действует по формуле $(df)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = f(g_2, \ldots, g_{n+1}) - f(g_1g_2, g_3, \ldots, g_{n+1}) + f(g_1, g_2g_3, \ldots, g_{n+1}) - \cdots + (-1)^n f(g_1, \ldots, g_ng_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n)$. а) Докажите, что $d^2 = 0$, то есть таким образом определен коцепной комплекс. б) Вычислите когомологии этого комплекса при $G = \mathbb{Z}_2$, $K = \mathbb{Z}$ (кольцо — модуль над самим собой, то есть абелева группа); в) при $G = \mathbb{Z}_2$, K — произвольный модуль; г) при $G = S_3$, $K = \mathbb{Z}$.

Задача 6. Пусть $0 \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$ — цепной комплекс, члены которого C_i — конечномерные векторные пространства над полем $\mathbb{F}$. Докажите, что $\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim C_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H_k(C.)$. (Эта величина называется эйлеровой характеристикой комплекса.) Выразите эйлерову характеристику графа через число его вершин и ребер.