

Семинар 6. Действие группы на множестве

Задача 6.1. Дайте определение группы симметрий $Iso(S)$ и группы вращений $Iso^+(S)$ геометрической фигуры $S \subset \mathbb{R}^3$ и докажите, что

(а) если группа $Iso(S)$ конечна, то порядки $Iso(S)$ и $Iso^+(S)$ или совпадают или отличаются в 2 раза. (б) группа симметрий (вращений) правильного многогранника – конечна.

Задача 6.2. Назовем n -мерным кубом I^n множество точек $\{(x_1, \dots, x_n) \mid -1 \leq x_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Вычислите (а) количество граней I^n ; (б) порядок группы G_n движений I^n и её подгруппы собственных движений G_n^+ . Движением называется отображение \mathbb{R}^n в себя сохраняющее расстояние. Кстати, покажите, что линейный изоморфизм $A \in GL_n(\mathbb{R})$, сохраняющее на месте куб, является движением (то есть сохраняет расстояние между точками).

Задача 6.3.

(а) Покажите, что с каждой парой подгрупп $H, K \subset G$ можно связать отношение эквивалентности на группе: $a \sim b \Leftrightarrow \exists h \in H, k \in K: a = hbk$. Множество двойных смежных классов $H \backslash G / K$ называется множеством классов эквивалентности относительно введенного отношения. Постройте биекцию между множествами H -орбит на G/K , K -орбит на $H \backslash G$ и множеством двойных смежных классов $H \backslash G / K$.

(б) Группа перестановок S_n действует на множестве $\{1, \dots, n\}$ а значит и на множестве его k -элементных подмножеств. Покажите, что это действие транзитивно и опишите стабилизатор G_k заданного k -элемента подмножества. Вычислите количество двойных смежных классов $G_k \backslash S_n / G_m$.

(в) Множество цепочек вложенных подпространств $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n$ размерностей k_1, \dots, k_r называется пространством флагов $Fl(k_1, k_2, \dots, k_r)$. Опишите орбиты естественного действия группы $GL_n(\mathbb{K})$ на пространстве флагов. С каждой парой флагов $V_1 \subset \dots \subset V_r$ и $W_1 \subset \dots \subset W_s$ можно связать матрицу целых чисел $\{d_{ij} := \dim V_i \cap W_j\}$. Какие-то ограничения на числа d_{ij} вы можете придумать, если размерности флагов $\{V_i\}$ и $\{W_j\}$ заданы? Постройте биекцию между множеством возможных матриц d_{ij} и множеством двойных смежных классов $B_{(k_1, \dots, k_r)} \backslash GL_n / B_{(l_1, \dots, l_s)}$, где $B_{(k_1, \dots, k_r)} \subset GL_n$ – стабилизатор заданного флага $(V_1 \subset V_r) \in Fl(k_1, \dots, k_r)$, а множеством двойных смежных классов

Задача 6.4. Группой проективных преобразований $PGL_n(\mathbb{F})$ называется факторгруппа всех обратимых линейных преобразований по подгруппе скалярных матриц. Покажите, что группа $PGL_n(\mathbb{F})$ действует на проективном пространстве $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^{n-1}$ (множестве прямых в \mathbb{F}^n , проходящих через 0).

Построив подходящее транзитивное действие группы проективных/линейных преобразований, предъявите изоморфизмы групп (а) $GL_2(\mathbb{F}_2) = S_3$; (б) $PGL_2(\mathbb{F}_3) = S_4$; (в) $PGL_2(\mathbb{F}_4) = A_5$.

Задача 6.5. Пользуясь действием группы $PGL_2(\mathbb{F}_5)$

(а) на проективной прямой $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_5}^1$, вложите $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ в S_6 ;

(б) на однородном пространстве $S_6/PGL_2(\mathbb{F}_5)$, постройте изоморфизм групп $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$.

(в) Постройте автоморфизм группы S_6 , переводящий стандартную подгруппу $S_5 \subset S_6$ в $PGL_2(\mathbb{F}_5) \subset S_6$, что он делает с классами сопряженности в S_6 .

Задача 6.6. Опишите классы сопряженности в группах

(а) диэдра D_n – симметрий правильного n -угольника;

(б) группе $Heis_p := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset GL_3(\mathbb{F}_p)$ – верхнетреугольных матриц порядка 3 над \mathbb{F}_p с единицами на диагонали.

Задача 6.7. Пусть перестановка $\sigma \in S_n$ разложена в произведение l независимых циклов длин $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_l$. Выпишите формулу для (а) знака, (б) порядка перестановки σ , (в) порядка класса сопряженности σ , (г) количества перестановок, коммутирующих с σ .