Семинар 5. Линейные отображения и факторпространства

Задача 5.1. Докажите, что ранг ненулевой $m \times n$-матрицы A равен 1, если и только если

(а) все строки матрицы пропорциональны; **(б)** все столбцы матрицы пропорциональны;

(в) существуют 2 набора чисел $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$ такие, что $A_{ij} = x_i y_j$.

(г) матрица A представляется в виде произведения $m \times 1$ и $1 \times n$ матриц.

Задача 5.2. Пусть A вырожденная 2×2 матрица. Докажите, что существует базис, в котором эта матрица имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ или $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Задача 5.3. Напишите матрицу линейного отображения D из векторного пространства многочленов степени не выше n в себя в базисе $1, x, \ldots, x^n$

(а) D – оператор дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x}$; **(б)** D – оператор сдвига $D_a : f(x) \mapsto f(x+a)$.

(в) Проверьте, что произведение матриц операторов сдвига D_a и D_b на числа a и b есть матрица сдвига на сумму D_{a+b}.

Задача 5.4. **(а)** Покажите, что найдется такое число N, что любое линейное отображение φ из векторного пространства $n \times n$ матриц в себя представляется в виде суммы $\varphi(X) = \sum_{i=1}^{N} A_i X B_i$ для некоторого подходящего набора матриц $A_1, \ldots, A_N, B_1, \ldots, B_N$.

(б) Покажите, что N нельзя положить меньшим n, но можно положить равным n^2.

Задача 5.5. *Коразмерностью* подпространства $W \subset V$ называется размерность факторпространства V/W. Вспомните почему любой идеал в кольцах многочленов $\mathbb{F}[x]$ и степенных рядов $\mathbb{F}[[x]]$ главный (порождается одним элементом) и покажите, что он имеет конечную коразмерность.

Задача 5.6. Пусть $\mathbb{F}^X$ – пространство $\mathbb{F}$-значных функций на конечном множестве X. Рассмотрим подпространства $V_Y, W_Y \subset \mathbb{F}^X$ тех функций, которые постоянны (соотв. равны 0) на подмножестве $Y \subset X$.

(а) Постройте изоморфизмы: $\varphi_{Y,X} : \mathbb{F}^X/W_Y \to \mathbb{F}^Y$, $\psi_{Y,X} : \mathbb{F}^X/V_Y \to \mathbb{F}^Y/\mathbb{F}^{\{0\}}$.

(б) Покажите, что эти изоморфизмы можно выбрать согласованно, то есть таким образом, чтобы для отображения множеств $f : X \to X'$ (такого, что $f(Y) \subset Y'$) имело место равенство композиций линейных отображений, записанных в виде коммутативных диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^X/W_Y & \xrightarrow{\varphi_{Y,X}} & \mathbb{F}^Y \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathbb{F}^{X'}/W_{Y'} & \xrightarrow{\varphi_{Y',X'}} & \mathbb{F}^{Y'} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{F}^X/V_Y & \xrightarrow{\psi_{Y,X}} & \mathbb{F}^Y/\mathbb{F}^{\{0\}} \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathbb{F}^{X'}/V_{Y'} & \xrightarrow{\psi_{Y',X'}} & \mathbb{F}^{Y'}/\mathbb{F}^{\{0\}} \end{array}$$

Задача 5.7. Рассмотрим последовательность векторных пространств и отображений между ними:

$$0 \overset{d_{-1}}{\to} V_0 \overset{d_0}{\to} V_1 \overset{d_2}{\to} \ldots \overset{d_{n-1}}{\to} V_n \overset{d_n}{\to} 0 \tag{5.1}$$

Обозначим $Z_i := \ker(d_i)$ и $B_i := \operatorname{im}(d_{i-1})$ подпространства в V_i. Докажите равенства

(а) $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} \dim Z_i\right) - \left(\sum\limits_{i=0}^{n} \dim(V_i/B_i)\right) = \dim V_0 - \dim V_n$;

(б) $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H_i$, при условии $d_{i+1} \circ d_i = 0\ \forall i$. В данной ситуации последовательность (5.1) называется *цепным комплексом*, пространства $H_i := Z_i/B_i$ его *гомологиями*, а описанная знакопеременная сумма *эйлеровой характеристикой.*

Задача 5.8. Зафиксируем цепочку вложенных векторных пространств $U_1 \subset U_2 \subset U$ над $\mathbb{F}_q$ размерностей $2, 4, 7$ соответственно. Сколько существует подпространств $V \subset U$, таких что

(а) $V + U_2 = U$ и $\dim V = 6$, **(б)** $V \cap U_2 = U_1$ и $\dim V = 5$, **(в)** $(V + U_2 = U)$ & $(V \cap U_2 = U_1)$.

Задача 5.9. Назовем два набора подпространств $(V_1, \ldots, V_k)$, $(V_1', \ldots, V_k')$ в заданном n-мерном пространстве V эквивалентными, если существует линейный изоморфизм $A : V \to V$, такой что $A(V_i) = V_i'$.

(а) Докажите, что числа $d_{i_1 \ldots i_s} := \dim V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_s}$ являются инвариантами (то есть одинаковы у эквивалентных наборов), можете ли вы предъявить ещё натуральнозначные инварианты? Например, является ли инвариантом $\dim(V_1 + V_2)/(V_1 \cap V_2)$? Выражается ли он через уже описанные?

Верно ли, что существует конечное число инвариантнов однозначно определяющий набор из

(б) одного, **(в)** двух, **(г)*** трёх подпространств с точностью до эквивалентности.

В тех случаях, когда это возможно предъявите минимальный набор инвариантов.