Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2019

3

3.1. Пусть $\mathcal{C}$ – категория с нулевым объектом $\underline{0}$; для любых объектов $X, Y \in\in \mathcal{C}$ уточните определение элемента $0_{X \to Y} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Пусть морфизм $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеет ядро $\iota : \ker(\alpha) \to X$. Проверьте, что это ядро определено однозначно с точностью до изоморфизма.

3.2. Убедитесь, что в категории $\mathcal{GRP}$ ядра существуют, и что для любого морфизма групп $\alpha : G \to H$ морфизм $\ker(\alpha) \to G$ является *вложением.* В силу последнего утверждения ядра морфизмов групп отождествляются с подгруппами.

3.3. Введём категорию *пунктированных множеств* $\mathcal{SET}^{\bullet}$, объекты которой – пары (X, x_0), где $X \in\in \mathcal{SET}$ и $x_0 \in X$, а

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{SET}^{\bullet}}\big((X, x_0), (Y, y_0)\big) := \{\alpha \in Y^X \mid \alpha(x_0) = y_0\}.$$

Существуют ли ядра в категории $\mathcal{SET}^{\bullet}$?

3.4. Напомним, что в любой категории $\mathcal{C}$ морфизм $\varepsilon \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ называется *эпиморфизмом*, если он *сократим справа*, то есть для любого объекта $A \in\in \mathcal{C}$ и любых морфизмов $\alpha, \beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, A)$ из равенства $\alpha \circ \varepsilon = \beta \circ \varepsilon$ следует равенство $\alpha = \beta$. Определяется ли эпиморфизм в категории $\mathcal{GRP}$ своим ядром? Иначе говоря, если даны три группы G, H, H' и два эпиморфизма $\varepsilon : G \to H$ и $\varepsilon' : G \to H'$, следует ли из равенства $\ker(\varepsilon) = \ker(\varepsilon')$ наличие изоморфизма $\iota : H \to H'$, удовлетворяющего $\iota \circ \varepsilon = \varepsilon'$?

3.5. Если вы утвердительно ответили на вопрос задачи **3.3**, то ответьте на новый: определяется ли эпиморфизм в категории $\mathcal{SET}^{\bullet}$ своим ядром?

3.6. Существуют ли коядра в $\mathcal{GRP}$?

3.7. Обозначим $\mathbb{R}[x]^+ \in\in \mathcal{AB}$ аддитивную группу кольца многочленов с вещественными коэффициентами, и обозначим $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathbb{R}[x]^+ \to \mathbb{R}[x]^+$ эндоморфизм дифференцирования. Определите $\ker(\mathrm{D})$ и $\mathrm{coker}(\mathrm{D})$.

3.8. Пусть в категории $\mathcal{C}$ существуют нулевой объект, ядра и коядра. Восстановив определение *мономорфизма* как двойственное к определению эпиморфизма из задачи **3.4**, установите, что *любой морфизм раскладывается в композицию мономорфизма и эпиморфизма.* Подробно рассмотрите случай $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$.

19 сентября, *Г.Б. Шабат*