

5

5.1. Пусть дана группа $G \in \mathcal{GRP}$ и модуль $M \in G\text{-MOD}$. Пользуясь определениями

$$d^{(0)} : M \longrightarrow M^G : m \mapsto (g \mapsto {}^g m - m),$$

$$d^{(1)} : M^G \longrightarrow M^{G \times G} : c \mapsto ((g_0, g_1) \mapsto {}^{g_0} c(g_1) - c(g_0 g_1) + c(g_0)),$$

$$d^{(2)} : M^{G \times G} \longrightarrow M^{G \times G \times G} : c \mapsto ((g_0, g_1, g_2) \mapsto {}^{g_0} c(g_1, g_2) - c(g_0 g_1, g_2) + c(g_0, g_1 g_2) - c(g_0, g_1)),$$

проверьте, что $d^{(1)} \circ d^{(0)} = 0$ и $d^{(2)} \circ d^{(1)} = 0$.

5.2. В обозначениях предыдущей задачи, введя группы когомологий $H^1(G, M) := \frac{\ker(d^{(1)})}{\text{im}(d^{(0)})}$ и $H^2(G, M) := \frac{\ker(d^{(2)})}{\text{im}(d^{(1)})}$, для произвольной точной последовательности G -модулей

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

определите последовательность

$$\begin{aligned} H^1(G, M') \rightarrow H^1(G, M) \rightarrow H^1(G, M'') \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\delta} H^2(G, M') \rightarrow H^2(G, M) \rightarrow H^2(G, M'') \end{aligned}$$

и проверьте её точность.

5.3. Перечислите расщепления точной последовательности

$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow D_n \longrightarrow C_2 \longrightarrow 1$$

и разбейте их на классы сопряжённости. Сопоставьте полученные результаты с непосредственно вычисленными группами когомологий $H^1(C_2, C_n)$ для небольших значений n .

5.4*. Перечислите расщепления точной последовательности

$$0 \longrightarrow (\mathbb{F}_p)^n \longrightarrow \text{Aff}_n(\mathbb{F}_p) \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

для небольших значений n и p . Разбейте их на классы сопряжённости. Сопоставьте полученные результаты с непосредственно вычисленными группами когомологий $H^1(\text{GL}_n(\mathbb{F}_p), (\mathbb{F}_p)^n)$.

5.5. Перечислите группы порядка 8, представив их как расширения групп меньшего порядка.

10 октября, Г.Б. Шабат