Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2019

6

6.1. Обозначим для группы $G \in\in \mathcal{GRP}$ и G-модуля $A \in\in G\_\mathcal{MOD}$ и через $\mathrm{E}(G,A)$ множество классов изоморфности расширений G с помощью A, индуцирующих на A заданную структуру G-модуля. Для другой группы $G' \in\in \mathcal{GRP}$ и морфизма $\alpha : G' \to G$ постройте *естественное* отображение $\mathrm{E}(G,A) \to \mathrm{E}(G',A)$.

6.2. В обозначениях предыдущей задачи пусть дана другой G-модуль $A' \in\in G\_\mathcal{MOD}$ и морфизм G-модулей $\beta : A \to A'$. Постройте *естественное* отображение $\mathrm{E}(G,A) \to \mathrm{E}(G,A')$.

6.3*. Пусть G – конечная группа, действующая на аддитивной группе $\mathbb{Z}^+$ тривиально. С помощью точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \frac{\mathbb{Q}^+}{\mathbb{Z}^+} \longrightarrow 0$$

в обозначениях предыдущих двух задач постройте *естественную* биекцию $\mathrm{Mor}_{\mathcal{GRP}}(G, \frac{\mathbb{Q}^+}{\mathbb{Z}^+}) \overset{\cong}{\to} \mathrm{E}(G,\mathbb{Z}^+)$.

6.4*. Для группы $G \in\in \mathcal{GRP}$ и G-модуля $A \in\in G\_\mathcal{MOD}$ введём морфизм абелевых групп, сопоставляющий каждому классу 2-когомологий кососимметрическую A-значную функцию на группе G

$$\theta : \mathrm{H}^2(G,A) \to \wedge^2(G,A) : [c] \mapsto \big((\phi,\psi) \mapsto c(\phi,\psi) - c(\psi,\phi)\big).$$

Проверьте корректность этого отображение. Введя (в обозначениях предыдущих задач) множество классов изоморфности *абелевых* расширений G с помощью A и обозначив его $\mathrm{E}_{\mathcal{AB}(G,A)} \subseteq \mathrm{E}(G,A)$, установите биекцию $\ker(\theta) \simeq \mathrm{E}_{\mathcal{AB}(G,A)}$.

6.5. Докажите, что всякая подгруппа диэдральной группы – либо диэдральная, либо циклическая.

6.6. Введём стандартные обозначения для *тела кватернионов*

$$\mathbb{H} := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathrm{i} \oplus \mathbb{R}\mathrm{j} \oplus \mathbb{R}\mathrm{k} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathrm{j}.$$

Обозначим для $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ кватернион $\rho = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{m}}$ и определим *обобщённую кватернионную группу* $\mathsf{Q}_{4m} := \langle \rho, \mathrm{j} \rangle$. Убедитесь, что эта группа может быть определена как расширение

$$0 \longrightarrow \langle \rho \rangle \longrightarrow \mathsf{Q}_{4m} \longrightarrow \mathsf{C}_2 \longrightarrow 0,$$

и постройте соответствующий 2-коцикл. Идентифицируйте группу Q_8.

17 октября, *Г.Б. Шабат*