

7

Ниже для циклических групп используется обозначение

$$C_n := \frac{\mathbb{Z}^+}{n\mathbb{Z}^+}.$$

7.1. Вычислите непосредственно группы когомологий $H^2(C_p, C_p)$ с тривиальным действием циклических групп на себе для $p = 2, 3, 5$. Сопоставьте полученные результаты с перечислением групп порядков 4, 9, 25.

7.2. Перечислив группы порядков 6, 10, 14, 15, сопоставьте полученные результаты с данными о группах $H^2(C_p, C_q)$, где одна группа действует на другой подходящим образом.

7.3. Возможно ли получение изоморфных групп из разных расширений одной конечной группы с помощью другой? Рассмотрите сначала всевозможные расширения $0 \rightarrow C_4 \rightarrow E \rightarrow C_2 \rightarrow 0$, а затем – всевозможные расширения $0 \rightarrow C_2 \times C_2 \rightarrow E \rightarrow C_2 \rightarrow 0$.

7.4. Перечислите группы порядка 12.

7.5*. Всякому ли внешнему действию $C_2 \rightarrow \text{Out}(D_4)$ соответствует расширение $0 \rightarrow D_4 \rightarrow E \rightarrow C_2 \rightarrow 0$, где E – подходящая 16-элементная группа?

7.6*. Всякому ли внешнему действию $C_2 \rightarrow \text{Out}(Q_8)$ соответствует расширение $0 \rightarrow Q_8 \rightarrow E \rightarrow C_2 \rightarrow 0$, где E – подходящая 16-элементная группа?

7.7.** Найдите нетривиальный элемент в группе $H^2(C_2, \{\pm 1\})$, где группа $\{\pm 1\}$ интерпретируется как центр кватернионной группы Q_8 . Для подходящего расширения $0 \rightarrow Q_8 \rightarrow E \rightarrow C_2 \rightarrow 0$ вычислите внешнее действие $C_2 \rightarrow \text{Out}(Q_8)$ и параметризуйте с помощью группы $H^2(C_2, \{\pm 1\})$ "все" расширения с тем же внешним действием.

Совет. Воспользуйтесь литературой о 16-элементных группах.

24 октября, Г.Б. Шабат