НМУ, I курс, 21.10.2019

Листок 6.

Множество U в метрическом пространстве (X, ϱ) называется открытым, если для всякой точки $a \in U$ найдется шар $B(a,r) \subset U$. Множество F замкнуто, если его дополнение открыто.

Задача 1.

(a) Докажите, что открытый шар является открытым множеством, а замкнутый шар является замкнутым множеством.

(b) Докажите, что любое объединение и конечное пересечение открытых множеств является открытым; любое пересечение и конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Замыканием множества E в (X, ϱ) называется множество $\overline{E} = \bigcap_{E \subset F} F$ – пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E. Таким образом, замыканием E является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим E.

Задача 2.

(a) Докажите, что $\overline{E} = E \bigcup \{\text{граничные точки}\} = E \bigcup \{\text{предельные точки}\}$.

(b) Покажите, что F – замкнуто тогда и только тогда, когда $F = \overline{F}$.

(c) Верно ли, что $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$?

Задача 3. Пусть $a_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \to \infty$. Кроме того, пусть $\lim_k a_k = 0$. Найдите множество частичных пределов последовательности дробных частей $b_n = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$.

Задача 4. Докажите, что множество частичных пределов ограниченной последовательности вещественных чисел, расстояние между соседними членами которой стремится к нулю, является либо точкой, либо отрезком.

Задача 5. Докажите, что множество частичных пределов последовательности элементов метрического пространства является замкнутым множеством. Покажите, что на числовой прямой всякое замкнутое множество является множеством частичных пределов некоторой последовательности. Верно ли это для замкнутого множества в произвольном метрическом пространстве?

Задача 6. Докажите, что прямую нельзя представить в виде объединения двух непустых и непересекающихся открытых множеств или двух непустых и непересекающихся замкнутых множеств. Опишите все подмножества прямой, каждое из которых являются одновременно открытым и замкнутым множеством.

Задача 7. Докажите, что числовую прямую нельзя представить в виде объединения счетного набора попарно непересекающихся отрезков.

Задача 8. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Покажите, что всякое бесконечное ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ имеет предельную точку. Приведите пример полного метрического пространства, в котором не из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Задача 9. Говорят, что у множества A есть конечная ε-сеть, если существует такое конечное множество точек $b_1, \ldots, b_N$, что A лежит в объединении шаров $B(b_j, \varepsilon)$. Если у множества для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, то такое множество называется вполне ограниченным. Докажите, что куб в $\mathbb{R}^n$ является вполне ограниченным множеством. Проверьте, что множество является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда из всякой последовательности элементов этого множества можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

Задача 10. Обозначим через l_2 метрическое пространство последовательностей вещественных чисел x_n, $\sum_n x_n^2 < \infty$, с метрикой

$$\varrho(x,y) = \sqrt{\sum_n (x_n - y_n)^2}.$$

(a) Проверьте, что это действительно метрическое пространство.

(b) Докажите, что это полное метрическое пространство.

(c) Проверьте, что единичный шар с центром в нуле не является вполне ограниченным множеством.

Задача 11.

(a) Докажите, что множество в $A \subset l_2$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограниченно и

$$\sup_{x\in A} \sum_{n\geq N} |x_n|^2 \to 0.$$

(b) Для какой последовательности положительных чисел a_n множество

$$\{x \in l_2\colon \sum_n a_n x_n^2 \leq 1\}$$

является вполне ограниченным?

Задача 12.

(a) Пусть числовой ряд $\sum_n a_n$ сходится и $a_n \geq 0$. Докажите, что существует последовательность c_n такая, что $c_n \leq c_{n+1}$, $c_n \to \infty$ и ряд $\sum_n c_n a_n$ сходится.

(b) Пусть $A \subset l_2$ – вполне ограниченное множество. Докажите, что A содержится в некотором вполне ограниченном эллипсоиде вида

$$\Big\{x\colon \sum_n a_n x_n^2 \leq 1\Big\}.$$

(c) Пусть A – замкнутое вполне ограниченное множество в l_2. Предположим, что диаметр A строго меньше 2 и A лежит в единичном шаре $B(0,1) \subset l_2$. Докажите, что для всякого n найдутся такие $u_1, \ldots, u_n \in B(0,1)$, что множества $A + u_j$ попарно не пересекаются и лежат в $B(0,1)$.