Листок 7.

Пусть (X, ϱ_X) и (Y, ϱ_Y)– метрические пространства и $f\colon X \mapsto Y$. Функция f непрерывна в точке $a \in X$, если для всякой последовательности $x_n \in X$ верно $x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Из свойств предела последовательности легко выводится, что композиция непрерывных функций является непрерывной функцией. Кроме того, функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in X$ верно $\varrho_X(x, a) < \delta \Longrightarrow \varrho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Пусть $A \subset X$ и $f\colon A \mapsto Y$. Пусть a – предельная точка A. Функция f имеет в точке a предел по множеству A равный b, если функция $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in A \\ b,\ x = a \end{cases}$ отображающая $A \cup \{a\}$ в Y, является непрерывной в точке a. Далее пишем $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Задача 1. Покажите, что следующее утверждение неверно. Пусть $f\colon A \mapsto B$, $g\colon B \mapsto C$ и a – предельная точка A и b – предельная точка B. Тогда из существования пределов $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{y\to b} g(y) = c$ следует $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. Как исправить ошибку?

Задача 2. Пусть f не убывает на интервале (a, b). Докажите, что если функция f ограничена сверху, то существует предел в точке b по множеству (a, b) (такой предел называют левым, аналогично предел в точке a по (a, b) называют правым). Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

Задача 3. Докажите, что $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Задача 4. Приведите пример числовой функции $f(x, y)$ непрерывной вдоль всякой прямой, но разрывной по совокупности переменных.

Задача 5. Пусть числовая функция $f(x, y)$ непрерывна по x и равномерно непрерывна по y, т. е. $\sup_x |f(x, y) - f(x, y_0)| \to 0$ при $y \to y_0$. Докажите, что f непрерывна по совокупности переменных.

Задача 6. Пусть $f(x, y)$ непрерывна по каждой переменной в отдельности. Докажите, что найдется хотя бы одна точка, в которой f непрерывна по совокупности переменных.

Задача 7. Докажите, что множество непрерывных функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ континуально.

Задача 8. Пусть $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$, где (X, ϱ) – метрическое пространство. Известно, что $x_n \to x$ влечет $f_n(x_n) \to f(x)$. Докажите функция f непрерывна.

Задача 9. Пусть (X, ϱ) – метрическое пространство.

(a) Пусть $A \subset X$. Докажите, что $f(x) = dist(x, A) = \inf\{\varrho(x, y)\colon\ y \in A\}$ является непрерывной функцией.

(b) Докажите, что множество нулей непрерывной функции $X \to \mathbb{R}$ является замкнутым множеством и всякое замкнутое множество является множеством нулей некоторой непрерывной функции.

(c) Докажите, что для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств существует непрерывная функция, которая равна нулю на одном из них и единице на другом.

Задача 10. (a) Опишите все непрерывные числовые функции на прямой, удовлетворяющие тождеству $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(b) Существует ли разрывная функция, для которой выполняется тождество из (a)?

(c) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность монотонностью?

(d) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность ограниченностью f в некоторой окрестности нуля?

Задача 11. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Докажите, что множество точек разрыва является не более чем счетным объединением замкнутых множеств.

(b) Докажите, что для всякого замкнутого множества F существует функция, у которой множество точек разрыва F.

(c)* Докажите, что не более чем счетное объединение замкнутых множеств является множеством точек разрыва некоторой функции.

(d) Существует ли функция на $\mathbb{R}$, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

Задача 12.

(a) (*Канторова лестница*). Постройте монотонную непрерывную функцию $h : [0, 1] \to [0; 1]$, такую что $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, и $h(x)$ постоянна на любом интервале, не содержащем точек из канторова множества.

Непрерывное отображение $\gamma\colon [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ называется непрерывной кривой в $\mathbb{R}^2$.

(b) (*Кривая Пеано*) Постройте непрерывную кривую, которая проходит через каждую точку квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.