

## Проективные преобразования и модель Кэли–Клейна

**Задача 10.1.** Дана четверка прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что двойное отношение 4 точек, отсекаемых исходными прямыми на еще одной прямой, не зависит от выбора этой вспомогательной прямой.

**Задача 10.2.** Запишите уравнение гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$ , параболы  $y = x^2$ , окружности  $x^2 + y^2 = 1$  в однородных координатах и найдите все их точки на бесконечности.

**Задача 10.3.** Укажите какое-нибудь проективное преобразование, переводящее окружность  $x^2 + y^2 = 1$  в параболу  $y = x^2$ . Единственно ли оно?

**Задача 10.4.** Образ кривой второй степени при проективном преобразовании плоскости — кривая второй степени.

**Задача 10.5.** Гиперболическая окружность в модели Клейна является евклидовым эллипсом.

**Задача 10.6.** Дан круг, его хорда  $AB$  и точка  $X$  внутри круга. Пусть  $P$  — точка пересечения касательных к кругу в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что  $PX$  — гиперболический перпендикуляр к  $AB$  (для модели Кэли–Клейна в данном круге).

**Задача 10.7.** Дан круг и две его пересекающиеся хорды. Постройте одной линейкой прямую, являющуюся гиперболической биссектрисой угла между ними.

**Задача 10.8.** а) Если две высоты гиперболического треугольника пересекаются, то все три его высоты пересекаются в одной точке. б\*) Сформулируйте и докажите обобщение на произвольные гиперболические треугольники.

**Задача 10.9\*.** а) Средняя линия треугольника перпендикулярна срединному перпендикуляру к соответствующей стороне. б) Медианы гиперболического треугольника пересекаются в одной точке.

