

Листок 1. Введение в кратные дзета-значения

Упражнение 1.1. Корректность определения кратных дзета-значений

Докажите, что для любой последовательности целых положительных чисел $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ ряд

$$\zeta(\bar{n}) := \sum_{0 < i_1 < \dots < i_r} \frac{1}{i_1^{n_1} \dots i_r^{n_r}}, \quad (1)$$

где i_j целые положительные числа, сходится тогда и только тогда, когда последовательность \bar{n} допустима, т.е. $n_r \geq 2$. (Указание: оцените ряд (1) сверху, используя асимптотику для гармонического ряда, и снизу, учитывая последовательность $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{r-1} = r - 1$.)

Упражнение 1.2. Гармоническое произведение

- (а) Посчитайте гармоническое произведение $(n_1, n_2) * (n')$.
- (б) Покажите, что в гармоническом произведении $\bar{n} * \bar{n}'$ все слагаемые встречаются с кратностью один, если воспринимать n_i и n'_j как формальные переменные.
- (в) Проверьте, что гармоническое произведение последовательностей коммутативно и ассоциативно.
- (г) Проверьте, что гармоническое произведение сохраняет допустимость последовательностей, а также складывает веса (но не длины!) последовательностей в естественном смысле.
- (д) Докажите, что выполняется равенство

$$\zeta(\bar{n}) \cdot \zeta(\bar{n}') = \zeta(\bar{n} * \bar{n}').$$

(Главное, чтобы это несложное комбинаторное рассуждение было приведено полностью, но ёмко.)

Упражнение 1.3. Тасовочное произведение

- (а) Для любых целых положительных чисел n, n' найдите коэффициенты C_{m_1, m_2} в разложении $(n)\text{ш}(n') = \sum C_{m_1, m_2}(m_1, m_2)$, где сумма берется по всем целым положительным числам m_1, m_2 , для которых $m_1 + m_2 = n + n'$.
- (б) Проверьте, что тасовочное произведение последовательностей коммутативно и ассоциативно.
- (в) Проверьте, что тасовочное произведение сохраняет допустимость последовательностей, а также складывает веса и длины последовательностей в естественном смысле.

Упражнение 1.4. Регуляризованные соотношения

- (а) Покажите, что для любой допустимой последовательности \bar{n} как в гармоническом произведении $\bar{n} * (1)$, так и в тасовочном произведении $\bar{n}\text{ш}(1)$ единственное недопустимое слагаемое — это $(\bar{n} 1)$.
- (б) Посчитайте произведения $(1, 2) * (1)$ и $(1, 2)\text{ш}(1)$ и выведите из этого соотношение $\zeta(1, 1, 2) = \zeta(2, 2) + \zeta(1, 3)$.

Упражнение 1.5. Гипотезы про кратные дзета-значения

Используя теорему Брауна, покажите, что гипотеза Хоффмана равносильна объединению гипотезы об однородности и гипотезы Загье.