Листок 2. Итерированные интегралы

Упражнение 2.1. Сходимость некоторых итерированных интегралов

Пусть $T = [0,1]$ — отрезок с координатой t, M — гладкое многообразие, $\gamma\colon T \to M$ — кусочно-гладкий путь и пусть ω_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ — гладкие комплекснозначные дифференциальные 1-формы на $M \smallsetminus \{\gamma(0)\}$, т.е. $\omega_i \in A^1_{M\smallsetminus\{\gamma(0)\}}$. Определим функции f_i на $(0,1]$ по формуле $f_i dt = \gamma^*\omega_i$ и предположим, что функции $f_1(t)$ и $t \cdot f_i(t)$ при $2 \leqslant i \leqslant n$ задаются рядом от t, сходящимся на $[0,1]$. Докажите, что тогда для любого t, $0 < t \leqslant 1$, выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,t}} \omega_1 \dots \omega_n = S\bigl(f_n \cdot S(f_{n-1} \cdot \ldots S(f_1)\ldots)\bigr)(t)\,,$$

причем предел в левой части и все подинтегральные выражения в правой части кроме f_1 задаются рядами от t, сходящимися на $[0,1]$ и обращающимися в нуль при $t = 0$. (Указание: воспользуйтесь индукцией по n.)

Упражнение 2.2. Композиция путей

Докажите, что для любых двух путей $\gamma, \gamma'\colon T \to M$ с $\gamma(1) = \gamma'(0)$ и для любого набора 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_n \in A^1_M$ выполняется равенство

$$\int_{\gamma\gamma'} \bar{\omega} = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma} \omega_1 \dots \omega_i \cdot \int_{\gamma'} \omega_{i+1} \dots \omega_n\,,$$

где по определению при $i = 0$ и $i = n$ соответствующие слагаемые равны $\int_{\gamma'} \omega_1 \dots \omega_n$ и $\int_{\gamma} \omega_1 \dots \omega_n$. (Указание: постройте подходящий диффеоморфизм между открытыми плотными подмножествами $\coprod_{i=0}^{n} \Delta^i \times \Delta^{n-i} \overset{\sim}{\dashrightarrow} \Delta^n$.)

Упражнение 2.3. Обратный путь

Проверьте, что для любого пути $\gamma\colon T \to M$ выполняется равенство

$$\int_{\gamma^{-1}} \omega_1 \dots \omega_n = (-1)^n \int_{\gamma} \omega_n \dots \omega_1\,,$$

где $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$.

Упражнение 2.4. Дифференциал функции

Докажите, что для любой гладкой комплекснозначной функции $\varphi \in A^0_M$ на M и пути $\gamma\colon T \to M$ с $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$ выполняются равенства

$$\int_\gamma (d\varphi)\omega_1 \ldots \omega_n = \int_\gamma (\varphi\,\omega_1)\omega_2 \ldots \omega_n - \varphi(a) \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_n\,,$$

$$\int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_{i-1}(d\varphi)\omega_i \ldots \omega_n = \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_{i-1}(\varphi\,\omega_i) \ldots \omega_n - \int_\gamma \omega_1 \ldots (\varphi\,\omega_{i-1})\omega_i \ldots \omega_n\,,$$

$$\int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_n(d\varphi) = \varphi(b) \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_n - \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_{n-1}(\varphi\,\omega_n)\,.$$

Упражнение 2.5. Кривизна связности

Пусть E — комплексное векторное расслоение на M со связностью

$$\nabla\colon \Gamma(M, E) \longrightarrow \Gamma(M, E \otimes T^\vee_M)\,.$$

Определим отображение $\nabla\colon \Gamma(M, E \otimes T^\vee_M) \to \Gamma(M, E \otimes \wedge^2 T^\vee_M)$ по правилу Лейбница: $\nabla(s \otimes \omega) = \nabla(s) \wedge \omega + s \otimes d\omega$, где $s \in \Gamma(M, E)$ и $\omega \in A^1_M = \Gamma(M, T^\vee_M)$.

(а) Покажите, что композиция $\nabla \circ \nabla\colon \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E \otimes \wedge^2 T^\vee_M)$ является A^0_M-линейным отображением, т.е. соответствует морфизму расслоений $E \to E \otimes \wedge^2 T^\vee_M$. Это отображение называется кривизной связности ∇.

(б) Пусть дана тривиализация $E \simeq \mathbb{C}^r \times M$, при которой связность ∇ соответствует отображению

$$(A^0_M)^r \longrightarrow (A^1_M)^r\,, \qquad y \longmapsto dy - y \cdot N\,,$$

где y является строкой длины r с коэффициентами в A^0_M, а N является матрицей размера $r \times r$ с коэффициентами в A^1_M. Проверьте, что тогда кривизна связности ∇ соответствует отображению

$$(A^0_M)^r \longrightarrow (A^2_M)^r\,, \qquad y \longmapsto y \cdot (N \wedge N - dN)\,.$$

Упражнение 2.6. Нильпотентность итерированных интегралов

Докажите, что для любых петель $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} \colon T \to M$ с вершиной в точке $a \in M$, для любого пути $\gamma \colon T \to M$ с $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ и для любого набора 1-форм $\omega_1, \ldots, \omega_n \in A^1_M$ имеет место обращение в нуль $\int_\sigma \omega_1 \ldots \omega_n = 0$, где

$$\sigma := (1 - \gamma_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \gamma_{n+1}) \cdot \gamma \in \mathbb{Z}[\pi_1(M; a, b)]\,.$$

(Указание: воспользуйтесь индукцией по n и формулой композиции путей для итерированных интегралов.)

Упражнение 2.7. Относительные гомологии

Пусть $N = N_0 \cup \ldots \cup N_m$ — топологическое пространство, являющееся объединением своих подпространств $N_i \subset N$. Предположим, что пространство N и все пространства $N_I := \cap_{i \in I} N_i$, где $\varnothing \neq I \subset \{0, \ldots, m\}$, являются CW-комплексами. Покажите, что тогда имеется квазиизоморфизм комплексов

$$\xi \ : \ \mathrm{Tot}\left(S_\bullet\big(\bigcap_{i=0}^m N_i\big) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{|I|=p} S_\bullet(N_I) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{i=0}^m S_\bullet(N_i) \right) \longrightarrow S_\bullet(N)\,,$$

где комплекс $\bigoplus\limits_{|I|=p} S_\bullet(N_I)$ имеет горизонтальную степень $-p-1$, а для каждого комплекса $S_\bullet$ член S_n имеет вертикальную степень $-n$, т.е. вертикальный дифференциал направлен снизу вверх. При этом горизонтальный дифференциал ∂ является суммой отображений вида

$$(-1)^{l(i)} (\varphi_i)_* \ : \ S_\bullet(N_{I \cup \{i\}}) \longrightarrow S_\bullet(N_I)\,,$$

где $0 \leqslant i \leqslant m$, $i \notin I$, отображение $\varphi_i \colon N_{I \cup \{i\}} \to N_I$ является естественным вложением, а число l задается условием

$$\{i_0, \ldots, i_r\} := \{0, \ldots, m\} \smallsetminus I\,, \qquad i_{l(i)} = i\,.$$

Наконец, морфизм комплексов $\xi \colon \mathrm{Tot} \to S_\bullet(N)$ индуцирован морфизмом комплексов

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i (\varphi_i)_* \ : \ \bigoplus_{i=0}^m S_\bullet(N_i) \longrightarrow S_\bullet(N)\,.$$

(Указание: проведите индукцию по m, используя разобранный на лекции случай $m = 2$.)