Листок 3. Коалгебры, биалгебры и алгебры Хопфа

Упражнение 3.1. Конечномерные c-векторные пространства

Покажите, что на конечномерном векторном пространстве существует ровно одна c-структура с точностью до изоморфизма. (Указание: воспользуйтесь представлением c-векторного пространства $U \simeq \varprojlim_{i \in I} U_i$, для которого все гомоморфизмы $U_j \to U_i$, $j \geqslant i$, сюръективны.)

Упражнение 3.2. Явный вид конечномерных комодулей

Покажите, что задать на конечномерном векторном пространстве V размерности n структуру комодуля над коалгеброй H — это то же самое, что задать матрицу $P \in \mathrm{Mat}_n(H)$, для которой $\epsilon(P) = \mathrm{Id}$ и выполняется равенство $\Delta(P) = P \otimes P$ в $\mathrm{Mat}_n(H \otimes H)$.

Упражнение 3.3. Инд-конечномерность для коалгебр

Докажите, что любая коалгебра H является направленным объединением $H = \bigcup_{i \in I} H_i$ конечномерных подкоалгебр $H_i \subset H$. (Указание: для произвольного конечного подмножества $S \subset H$ рассмотрите сначала конечномерный подкомодуль $V \subset H$, содержащий S, а затем рассмотрите $\Delta(v_i) = \sum_j v_j \otimes a_{ij}$ для базиса $v_1, \ldots, v_N$ в V, а также подпространство в H, порожденное V и всеми a_{ij}.)

Упражнение 3.4. Отсутствие про-конечномерности для модулей

Приведите пример алгебры A и линейного функционала $\ell\colon A \to k$, для которого $\mathrm{Ker}(\ell)$ на содержит никакой подмодуль конечной коразмерности.

Упражнение 3.5. Восстановление алгебры по категории модулей

Докажите, что для любой k-алгебры A имеется канонический изоморфизм $A \simeq \mathrm{End}(F)$, где $F\colon \text{Mod-}A \to \mathrm{Vect}(k)$ обозначает забывающий функтор из категории Mod-A правых A-модулей в категорию k-векторных пространств.

Упражнение 3.6. Самодвойственость биалгебр и алгебр Хопфа

(i) Проверьте, что аксиомы биалгебры самодвойствены, т.е. что векторное пространство H со структурой алгебры и коалгебры является биалгеброй тогда и только тогда, когда $H^\vee$ являтся c-биалгеброй.

(ii) Проверьте, что аксиома антипода самодвойствена, т.е. что биалгебра H является алгеброй Хопфа тогда и только тогда, когда c-биалгебра $H^\vee$ является c-биалгеброй Хопфа.

Упражнение 3.7. Отображение антипод

(i) Докажите, что если для биалгебры H отображение антипода ι существует, то оно единственно, а также является антигомоморфизмом H как коалгебры и алгебры. (Указание: имитируйте аналогичное рассуждение из теории групп.)

(ii) Покажите, что если H коммутативна или кокоммутативна, то ι является инволюцией.

Упражнение 3.8. Коалгебра $\mathrm{End}(V)$

(i) Пусть V является конечномерным векторным пространством. Тогда изоморфизм $\mathrm{End}(V) \simeq V^\vee \otimes V$ показывает, что векторное пространство $\mathrm{End}(V)$ канонически самодвойствено, и естественная структура алгебры на $\mathrm{End}(V)$ определяет на $\mathrm{End}(V)$ структуру коалгебры. Опишите ее более непосредственным образом как инвариантно, так и более явно, введя координаты в V.

(ii) Покажите, что $\mathrm{End}(V)$ с описанными выше структурами алгебры и коалгебры не является биалгеброй.

Упражнение 3.9. Тензорное произведение комодулей

Для комодулей V и V' над биалгеброй H определим отображение

$$V \otimes V' \longrightarrow V \otimes H \otimes V' \otimes H \simeq V \otimes V' \otimes H \otimes H \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes m} V \otimes V' \otimes H\,,$$

где m обозначает умножение относительно структуры алгебры на H. Проверьте, что это задает на $V \otimes V'$ структуру комодуля над H. (Указание: видимо, будет проще рассмотреть двойственную конструкцию тензорного произведения модулей над c-биалгеброй.)

Упражнение 3.10. Специальные элементы

(i) Покажите, что групповые элементы в биалгебре образуют моноид по умножению, а для алгебры Хопфа — группу.

(ii) Покажите, что примитивные элементы в биалгебре образуют алгебру Ли относительно коммутатора.