Доп.главы топологии. Листок 1 (к лекциям 1,2).

Крайний срок 14 октября. Загружать решения можно сюда

Задача 1. Используя теорему о нерве, докажите теорему Хелли: Пусть $U_1, \ldots, U_m$ — набор замкнутых выпуклых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, $m > n$. Допустим, что любые $n+1$ из $U_1, \ldots, U_m$ пересекаются. Тогда они все пересекаются. Можно пользоваться тем фактом, что у подмножества A в $\mathbb{R}^n$ группа гомологий $H_n(A, \mathbb{Z})$ тривиальна.

Задача 2. Пусть $f_1, f_2 \colon S \to T$ морфизмы конечных чумов, такие что для любого $s \in S$ выполнено $f_1(s) \leqslant f_2(s)$ в T. Тогда $|f_1| \simeq |f_2|$.

Задача 3. Выведите из предыдущего упражнения теорему Квиллена о слое для чумов.

Определение: пара морфизмов $f \colon S \rightleftarrows T \colon g$ между чумами называется соответствием Галуа, если

$$f(s) \geqslant t \Leftrightarrow s \geqslant g(t).$$

Задача 4. Докажите, что эквивалентно можно определить соотвествие Галуа следующим условием:

$$\forall s \in S \colon g(f(s)) \leqslant s; \text{ и } \forall t \in T \colon f(g(t)) \geqslant t.$$

Задача 5. Докажите, что если между S и T есть соответствие Галуа, то $|S| \simeq |T|$.

Задача 6. Пусть G — конечная группа, p — простое число. Рассмотрим чум $\mathcal{B}_p(G)$ всех p-подгрупп (не равных 1) в G, и чум $\mathcal{A}_p(G)$ всех коммутативных p-подгрупп (не равных 1) в G. Докажите, что $|\mathcal{A}_p(G)| \simeq |\mathcal{B}_p(G)|$.

Комментарий по пройденному. **Лекция 1.** Теорема Смейла [**9**]. Формулировка нерв-теоремы и способ ее доказать, близкий к лекции [**6**, Прил.4.G]. Комплексы Даукера, гомологическая версия [**5**], гомотопическая версия [**2**]. Функториальность комплексов Даукера [**4**]. Упрощение комплексов с помощью операций с булевой матрицей [**3**]. **Лекция 2.** Реализации чумов — много где, например, [**2**]. Теорема Квиллена о слое доказана в [**7**], а в [**8**] использована для изучения p-подгрупп. См. также [**1**].

Список литературы

[1] J. A. Barmak, *On Quillen's theorem A for posets*, Journal of Combinatorial Theory Ser. A, 118:8 (2011), 2445–2453.

[2] A. Björner, Topological methods. Handb. Comb. 2, 1819–1872 (1995).

[3] J.-D. Boissonnat, S. Pritam, D. Pareek, *Strong Collapse for Persistence*, 2018, preprint arXiv:1809.10945.

[4] S. Chowdhury, F. Mémoli, *A functorial Dowker theorem and persistent homology of asymmetric networks*. J Appl. and Comput. Topology 2, 115–175 (2018).

[5] C. H. Dowker, *Homology groups of relations*, Ann. Math. 56, 84—-95 (1952).

[6] А. Хатчер, *Алгебраическая топология*, 2011.

[7] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory, I: Higher K-theories*, Lecture Notes in Math. 341 (1973), 85–147.

[8] D. Quillen, *Homotopy Properties of the Poset of Nontrivial p-Subgroups of a Group*, Adv. in Math. 28 (1978), 101–128.

[9] S. Smale, *A Vietoris mapping theorem for homotopy*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 604–610.