ЛЕКЦИЯ 7

Аннотация. Ориентированный объем. Четность перестановки.

1. Ориентированные объемы

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim V = n$. Параллелепипедом, натянутым на векторы $a_1, \dots, a_n$ (количество векторов равно размерности пространства — важно!), называется множество $\Pi(a_1, \dots, a_n) = \{x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \mid 0 \le x_1, \dots, x_n \le 1\}$.

Определение 1. *Ориентированным объемом* параллелепипеда называется функция $\mathrm{Vol}_n : V^n \to \mathbb{R}$ на множестве наборов из n векторов, обладающая следующими свойствами:

(1) $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, ta_i, \dots, a_n) = t \mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ для любого i, любых векторов $a_1, \dots, a_n \in V$ и произвольного числа $t \in \mathbb{R}$.

(2) $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$ для любых i, j и любых векторов $a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n \in V$.

Отметим, что в свойстве 2 неравенство $i < j$ не обязательно.

Пример 1. Пусть $n = 2$, так что V — плоскость с началом координат O. Определим $\mathrm{Vol}_2(a_1, a_2)$ так: если векторы $a_1 = OA_1$ и $a_2 = OA_2$ пропорциональны (линейно зависимы; эквивалентное утверждение — точки O, A_1, A_2 лежат на одной прямой), то $\mathrm{Vol}_2(a_1, a_2) = 0$. Если же векторы не пропорциональны, то пусть точка B такова, что $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} OA_1BA_2$ — параллелограмм (иными словами, $OB = OA_1 + OA_2$). Если его вершины расположены так, что от стороны OA_1 к стороне OA_2 нужно поворачиваться против часовой стрелки ("параллелограмм ориентирован положительно"), то положим $\mathrm{Vol}_2(a_1, a_2)$ равным площади S_Π параллелограмма Π. Если же поворот нужно совершать по часовой стрелке ("параллелограмм ориентирован отрицательно"), то возьмем по определению $\mathrm{Vol}_2(a_1, a_2) = -S_\Pi$.

Площадь параллелограмма, угол которого фиксирован, пропорциональна произведению длин его сторон. Отсюда вытекает, что функция Vol_2 обладает свойством 1 для *положительных* t. Заметим также, что параллелограммы, натянутые на пары векторов (a_1, a_2) и $(-a_1, a_2)$ (а также $(a_1, -a_2)$), имеют противоположные ориентации и получаются друг из друга параллельным переносом — следовательно, имеют одинаковую площадь. Это доказывает свойство 1 для $t = -1$. Для произвольного $t < 0$ имеем теперь $\mathrm{Vol}_2(ta_1, a_2) = \mathrm{Vol}_2(-(-t)a_1, a_2) = -\mathrm{Vol}_2((-t)a_1, a_2)$ (по свойству 1 для $t = -1$) $= -(-t)\mathrm{Vol}_2(a_1, a_2)$ (по свойству 1 для $-t > 0$) $= t \mathrm{Vol}_2(a_1, a_2)$, и аналогично для умножения на t второго вектора.

Заметим теперь, что если паре векторов (a_1, a_2) соответствует параллелограмм OA_1BA_2, то паре $(a_1 + a_2, a_2)$ — параллелограмм $OBCA_2$, где C — точка, для которой $OC = 2a_1 + a_2$. Треугольник A_2CB получается из треугольника OBA_1 параллельным переносом, отсюда следует, что параллелограммы OA_1BA_2 и $OBCA_2$ имеют одинаковую площадь. Их ориентации тоже совпадают, откуда вытекает свойство 2.

Позднее мы докажем, что ориентированный объем существует (и единствен с точностью до пропорциональности) в пространстве любой размерности; но сначала докажем некоторые его свойства.

Лемма 1. *Если один из векторов $a_1, \dots, a_n$ — нулевой, то* $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_n) = 0$

Доказательство. Пусть $a_i = 0$. Тогда $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, \vec{0}, a_{i+1}, \dots, a_n) = \mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, 0 \cdot \vec{0}, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0 \cdot \mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, \vec{0}, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0$. $\square$

Лемма 2. *Для любых i и j, любого набора векторов $a_1, \dots, a_n$ и произвольного $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство* $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i + ta_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$.

Доказательство. Если $t = 0$, то утверждение очевидно. Если $t \neq 0$, то $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i + ta_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \frac{1}{t}\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i + ta_j, \dots, ta_j, \dots, a_n) = \frac{1}{t}\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, ta_j, \dots, a_n) = \mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$. $\square$

Пример 1, продолжение. Если OA_1BA_2 — положительно ориентированный параллелограмм на плоскости, где $OA_1 = a_1$ и $OA_2 = a_2$, и $0 \le t \le 1$, то паре векторов $(a_1 + ta_2, a_2)$ соответствует параллелограмм $OCDA_2$, где C — точка стороны A_1B, для которой $|A_1C| = t|A_1B|$, а D — точка продолжения этой стороны, для которой $|BD| = |A_1C|$. Треугольники OA_1C и A_2BD получаются друг из друга параллельным переносом, так что площади параллелограммов OA_1BA_2 и $OCDA_2$ равны. Ориентация параллелограмма $OCDA_2$ положительная, так что ориентированные площади параллелограммов совпадают, как и предсказывает (в более общем случае — для произвольной размерности и произвольного t) лемма 2.

Лемма 3. *Если векторы $a_1, \dots, a_n$ линейно зависимы, то* $\operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Доказательство. Пусть $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$. Среди коэффициентов $x_1, \dots, x_n$ хотя бы один не равен нулю; без ограничения общности предположим, что это x_1. Тогда $a_1 = -(x_2/x_1)a_2 - \dots - (x_n/x_1)a_n$, откуда $\operatorname{Vol}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \operatorname{Vol}_n(-(x_2/x_1)a_2 - \dots - (x_n/x_1)a_n, a_2, \dots, a_n) = \operatorname{Vol}_n(0, a_2, \dots, a_n)$ (согласно лемме 2, примененной $n-1$ раз — к первому и каждому из последующих аргументов) $= 0$ (по лемме 1). $\square$

Лемма 3 хорошо соответствует интуитивному пониманию того, что такое объем: если векторы $a_1, \dots, a_n$, на которые натянут параллелепипед, линейно зависимы, то параллелепипед целиком лежит в подпространстве $U \subset V$ размерности, меньшей n. Интуитивно ожидается (и на самом деле верно, см. курс анализа), что объем такого параллелепипеда будет равен нулю. Кроме того, лемма позволяет использовать объем в качестве "теста" на линейную зависимость (n векторов в n-мерном пространстве): вычислим ориентированный объем этих векторов (как это сделать, мы обсудим позднее), и если получился не нуль, то линейной зависимости нет. В следующей лекции будет доказано, что этот критерий всегда работает: если ориентированный объем (не равный тождественно нулю) набора векторов $a_1, \dots, a_n$ равен нулю, то эти векторы линейно зависимы.

Лемма 4.

$$\operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, b + c, a_{i+1}, \dots, a_n) = \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) + \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

для любого i и произвольного набора векторов $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b, c$.

Вместе со свойством 1 из определения ориентированного объема лемму можно переформулировать так:

Лемма 4'. *Функция* Vol_n *линейна по каждому из своих аргументов (при фиксированных остальных).*

Пример 1, еще продолжение. Пусть $n = 2$ и $OADB$ — параллелограмм, натянутый на векторы a и b, а $BDEC$ — параллелограмм, натянутый на векторы a и c. Тогда параллелограмм $OAEC$ натянут на векторы a и $b+c$. Если $\operatorname{Vol}_2(a, b) > 0$ и $\operatorname{Vol}_2(a, c) > 0$, то $OAEC$ получается из объединения $OADB \cup BDEC$ отрезанием треугольника OCB и добавлением равного ему треугольника AED (либо наоборот — отрезанием AED и добавлением OCB). Поэтому площадь $OAEC$ равна сумме площадей $OADB$ и $BDEC$, как и утверждает лемма 4. Если $\operatorname{Vol}_2(a, b) > 0$, но $-\operatorname{Vol}_2(a, b) < \operatorname{Vol}_2(a, c) < 0$, то аналогично доказывается, что площадь $OADB$ равна сумме площадей $OAEC$ и $CEDB$, что также соответствует (проверьте!) лемме 4.

Доказательство леммы 4. Если векторы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ (всего $n-1$ векторов) линейно зависимы, то равенство из леммы верно, поскольку обе его части равны нулю.

Пусть теперь векторы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ линейно независимы, а векторы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b$ линейно зависимы: $x_1 a_1 + \dots + x_{i-1} a_{i-1} + x_{i+1} a_{i+1} + \dots + x_n a_n + yb = 0$. Тогда $y \neq 0$ (иначе $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ линейно зависимы), поэтому получается $b = -(x_1/y)a_1 - \dots - (x_n/y)a_n$. Тогда $\operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0$ по лемме 3, а $\operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, b+c, a_{i+1}, \dots, a_n) = \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, c - (x_1/y)a_1 - \dots - (x_n/y)a_n, a_{i+1}, \dots, a_n) = \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Если же $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b$ (всего n векторов) линейно независимы, то это базис в V. Разложим c по базису: $c = x_1 a_1 + \dots + x_{i-1} a_{i-1} + x_{i+1} a_{i+1} + \dots + x_n a_n + yb$ и $b + c = x_1 a_1 + \dots + x_{i-1} a_{i-1} + x_{i+1} a_{i+1} + \dots + x_n a_n + (y+1)b$. Тогда $\operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, b + c, a_{i+1}, \dots, a_n) = \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, x_1 a_1 + \dots + x_{i-1} a_{i-1} + x_{i+1} a_{i+1} + \dots + x_n a_n + (y+1)b, a_{i+1}, \dots, a_n) = \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, (y+1)b, a_{i+1}, \dots, a_n) = (1+y) \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$ и аналогично $\operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \dots, a_n) = y \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$, откуда тоже вытекает равенство из леммы. $\square$

Лемма 5. *Функция* Vol_n *полностью кососимметрична, то есть меняет знак при обмене местами любых двух аргументов:* $\operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) = -\operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$.

Доказательство. $0 = \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_i + a_j, \dots, a_n)$ (по лемме 3, одинаковые векторы на i-м и j-м местах) $= \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) + \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) + \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n)$ (по лемме 4) $= \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + \operatorname{Vol}_n(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$ (опять по лемме 3). $\square$

2. Комбинаторное отступление: четность перестановки

Перестановкой называется биекция множества $\{1, \dots, n\}$ в себя; композиция биекций называется умножением перестановок. Относительно композиции (умножения) перестановки образуют группу преобразований, обозначаемую S_n.

Перестановку σ обозначают строкой $[\sigma(1), \dots, \sigma(n)]$. *Транспозиция* (ij) — перестановка, меняющая местами числа $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и оставляющая не месте все остальные.

Теорема 1. *Любая перестановка может быть представлена как произведение транспозиций.*

Эта теорема известна каждому из повседневного опыта: если разрешается менять книги на полке местами, то их можно в конце концов расставить в любом порядке. Если перестановка тождественная, то ее условно считают “произведением нуля транспозиций” (и теорему для нее — верной). Представление перестановки в виде произведения транспозиций не единственно. Количество представлений данной перестановки σ в виде произведения k транспозиций называется числом Гурвица $h_{n,k}(\sigma)$; например, $h_{3,3}((13)) = 2$, т.к. $(13) = (12)(23)(12) = (23)(12)(23)$ (и больше в S_3 таких представлений нет). Числа Гурвица обладают многими интересными свойствами и активно изучаются в комбинаторике и алгебраической геометрии.

Доказательство теоремы 1.

Замечание. В видеозаписи лекции дано менее удачное (более сложное) доказательство этой теоремы.

Из равенства $(ij)^2 = e$ (тождественная перестановка) вытекает, что если $\sigma = (i_1j_1)(i_2j_2)\dots(i_kj_k)$, то $\sigma(i_kj_k)\dots(i_2j_2)(i_1j_1) = e$; обратное, очевидно, тоже верно. Поэтому утверждение теоремы равносильно тому, что для каждой перестановки σ найдутся транспозиции $(i_1j_1)\dots(i_kj_k)$ такие, что $\sigma(i_1j_1)\dots(i_kj_k) = e$.

Докажем это утверждение индукцией по n; база $n = 1$ очевидна. Пусть $p = \sigma(n)$. Перестановка $\tau = \sigma(pn)$ переводит n в себя (если $p = n$, то положим просто $\tau = \sigma$). Значит, τ переводит в себя и множество $\{1,\dots,n-1\}$. Пусть тогда τ' — ограничение τ на множество $\{1,\dots,n-1\}$; это биекция (перестановка). По предположению индукции найдутся такие транспозиции $(i_1j_1),\dots,(i_kj_k)$ (где $1 \le i_\alpha, j_\alpha \le n-1$ для всех α), что $\tau'(i_1j_1)\dots(i_kj_k) = e$ — тождественная перестановка в группе S_{n-1}. Но тогда $\tau(i_1j_1)\dots(i_kj_k) \in S_n$ — перестановка, переводящая в себя все числа от 1 до n, то есть e — тождественная перестановка в группе S_n. Следовательно, $\sigma(\sigma(n)n)(i_1j_1)\dots(i_kj_k) = e$. □

Беспорядком в перестановке $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ называется любая пара $i, j \in \{1,\dots,n\}$, для которой $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Количество беспорядков в перестановке меняется от 0(тождественная перестановка) до $n(n-1)/2$ (перестановка $[n, n-1,\dots,2,1]$).

Теорема 2. *Пусть σ — произвольная перестановка, а (ij) — произвольная транспозиция. Тогда число беспорядков перестановки σ и число беспорядков перестановки $\sigma(ij)$ (произведение σ и (ij)) имеют разную четность.*

Доказательство. Пусть вначале $j = i+1$. Тогда беспорядки в перестановках σ и $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(i, i+1)$ одни и те же, за исключением пары $(i, i+1)$: $\tau(i) = \sigma(i+1)$, $\tau(i) = \sigma(i+1)$ так что если $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ (пара является беспорядком в σ), то $\tau(i) < \tau(i+1)$ (пара не является беспорядком в τ), и наоборот. Следовательно, количество беспорядков в τ отличается от количества беспорядков в σ на ± 1 и, следовательно, имеет другую четность.

Для произвольных i и $j > i$ имеем $(ij) = (i, i+1)(i+1, i+2)\dots(j-2, j-1)(j-1, j)(j-2, j-1)\dots(i, i+1)$ — всего произведение $2(j-i)-1$ транспозиций вида $(k, k+1)$. При умножении σ последовательно на каждую из них число беспорядков меняет свою четность; общее число транспозиций нечетно — следовательно, число беспорядков транспозиции $\sigma(ij)$ отличается четностью от числа беспорядков σ. □

Следствие 1. *Если перестановка σ — произведение k транспозиций $\sigma = (i_1j_1)\dots(i_kj_k)$, то количество беспорядков в σ имеет ту же четность, что и число k.*

Следствие 2 (следствия 1)**.** *Если σ представлена в виде произведения транспозиций двумя способами: $\sigma = (i_1j_1)\dots(i_kj_k) = (p_1q_1)\dots(p_\ell q_\ell)$, то числа k и ℓ имеют одинаковую четность.*

Число $(-1)^k$, где k как в следствии 2, называется четностью перестановки σ и обозначается $\operatorname{sgn}(\sigma)$ (обозначение не вполне общепринятое). Из следствия 2 вытекает, что четность корректно определена (числа k и ℓ могут быть разными, но $(-1)^k = (-1)^\ell$).

Следствие 3 (следствия 2)**.** $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ *для любых перестановок σ и τ.*

Доказательство очевидно.

Пусть теперь $e_1,\dots,e_n$ — произвольный набор векторов в пространстве V, а σ — перестановка. Тогда

Следствие 4 (из леммы 5)**.** $\operatorname{Vol}_n(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{Vol}_n(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(1)})$.