8. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Задача 1. а) Докажите, что следующие утверждения про проективные преобразования плоскости неверны:

(1) Всякое проективное преобразование переводит параллельные прямые в параллельные прямые.
(2) Всякое проективное преобразование переводит середину отрезка в середину отрезка.
(3) Всякое проективное преобразование переводит выпуклую фигуру в выпуклую.
(4) Если образы равных параллельных отрезков при проективном преобразовании — параллельные отрезки, то они равны.

б) Используя утверждение 2 пункта 1а докажите, что нельзя построить середину данного отрезка на плоскости, пользуясь только линейкой без делений.

Указание. В пункте 1б вначале дайте точное определение — что понимается под построением. Не забудьте, что построение может включать операции типа “возьмем произвольную вспомогательную точку на плоскости и соединим ее прямой с точкой p” (разумеется, окончательный результат не должен зависеть от выбора вспомогательных точек).

Задача 2. Пусть P, Q, R, S — вершины квадрата на плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$, а $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ — проективное преобразование, переводящее их в точки A, B, C, D (нарисуйте их самостоятельно). Куда переходит при преобразовании f центр квадрата? бесконечно удаленная прямая? середина стороны PQ? Какая прямая переходит в бесконечно удаленную?

Пусть $P(x_0, x_1, x_2)$ — однородный многочлен степени n с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$. Множество $\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{F}P^2 \mid P(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ называется плоской алгебраической кривой степени n. (Заметим, что если $P(x_0, x_1, x_2) = 0$, то и $P(tx_0, tx_1, tx_2) = 0$ для любого t в силу однородности P, так что условие $P(x_0, x_1, x_2) = 0$ в точке $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{F}P^2$ имеет смысл.) Точка $x \in \mathbb{F}$ называется средним гармоническим точек $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ относительно точки $a \in \mathbb{F}$, если $\frac{n}{x-a} = \frac{1}{x_1-a} + \dots + \frac{1}{x_n-a}$.

Задача 3. а) Докажите, что точка x — среднее гармоническое точек $x_1, \dots, x_n$ относительно точки a тогда и только тогда, когда для любого $t \in \mathbb{F}$ выполнено равенство $(x_1, x, t, a) + \dots + (x_n, x, t, a) = n$. б) Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{F}P^2$ — плоская алгебраическая кривая степени n, $a \notin \mathcal{P}$ — точка и U_a — множество прямых $\ell \subset \mathbb{F}P^2$ таких, что $a \in \ell$ и пересечение $\ell \cap \mathcal{P}$ состоит из n точек $x_1(\ell), \dots, x_n(\ell)$. Докажите теорему Коутса: средние гармонические точек $x_1(\ell), \dots, x_n(\ell)$ для всех $\ell \in U_a$ лежат на одной прямой. в) Вычислите и нарисуйте эту прямую для многочлена $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ и произвольной точки $a = [a_0 : a_1 : a_2]$.

Задача 4. а) Пусть $abcde$ — выпуклый пятиугольник на плоскости, а a', b', c', d', e' — точки пересечения его диагоналей ($a' = bd \cap ce$ и т.д.) Докажите, что пятиугольник $a'b'c'd'e'$ проективно эквивалентен $abcde$ (то есть получается из него проективным преобразованием). б*) Пусть $abcdef$ — выпуклый шестиугольник на плоскости, а $a', \dots, f'$ — точки пересечения его “коротких” диагоналей (соединяющих вершины, отстоящие друг от друга на 2 стороны: $a' = bd \cap ce$, …, $f' = ac \cap bd$). Точки $a'', \dots, f''$ получены подобным же образом из шестиугольника $a'b'c'd'e'f'$. Докажите, что шестиугольник $a''b''c''d''e''f''$ проективно эквивалентен $abcdef$.

Задача 5. а) Докажите теорему Паппа: если точки $a, b, c \in \mathbb{F}P^2$ лежат на одной прямой, а точки a', b', c' — на другой прямой, то точки $x = ab' \cap a'b$, $y = bc' \cap b'c$ и $z = ac' \cap a'c$ также лежат на одной прямой. б) Докажите вырожденную теорему Брианшона: если прямые ab, cd и ef на проективной плоскости пересекаются в одной точке p, а прямые bc, de и fa — в другой точке q, то прямые ad, be и cf также пересекаются в одной точке.