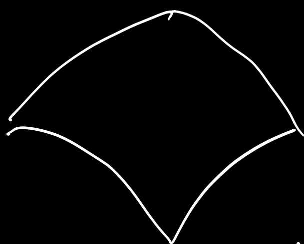
Анализ на многообразиях

Лекция 7



$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$

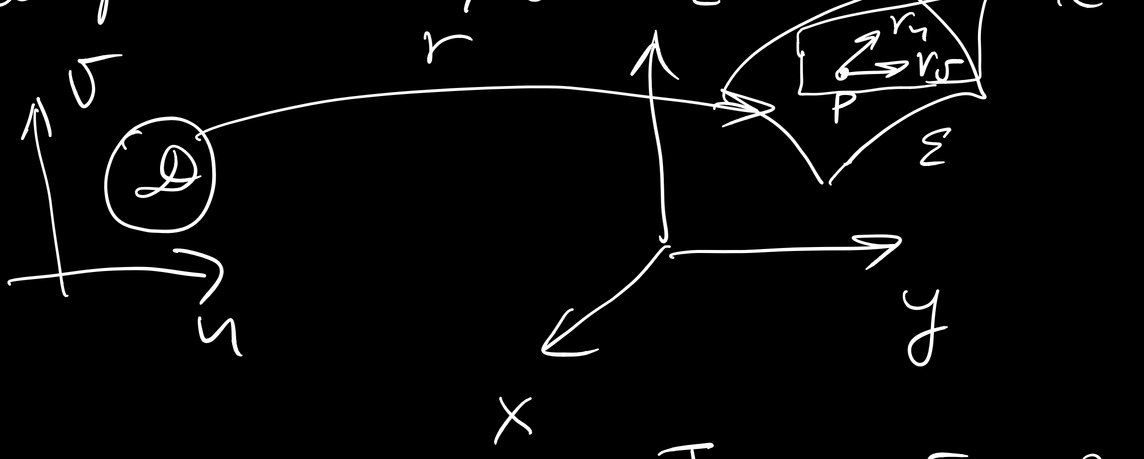
$\dim \Sigma = 2$

u, v — локальные координаты

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$

$I_p = \langle \cdot , \cdot \rangle |_{T_p \Sigma}$ первая квадратичная форма

векторные поле r_u, r_v



в базе r_u, r_v форма I имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle \end{aligned}$$

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

s – элемент длины дуги

$$s = \int_a^b |\dot\gamma|\,dt$$

$$ds = |\dot\gamma| \qquad ds^2 = |\dot\gamma|^2 = \langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle =$$

$$= \mathrm{I}(\dot\gamma, \dot\gamma) = (\dot u\ \dot v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} =$$

$\gamma(t) = (u(t), v(t))$

$\dot\gamma(t) = (\dot u(t), \dot v(t)) \Leftrightarrow \dot\gamma(t) = \dot u(t) r_u + \dot v r_v$

$$= E\dot u^2 + 2F\dot u \dot v + G\dot v^2 =$$

du, dv базис в ковекторах

двойственный к $\frac{\partial}{\partial u} = r_u$, $\frac{\partial}{\partial v} = r_v$

поэтому $du(\dot\gamma) = du(\dot u r_u + \dot v r_v) =$

$= \dot u$

$dv(\dot\gamma) = \dot v$

$$= (E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)(\dot\gamma)$$

$$\boxed{ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

$$\Updownarrow$$

I в базисе r_u, r_v имеет матрицу $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

II квадратичная форма

$$k_n = |pr_{\vec m} \ddot{\gamma}|$$

$$\pm k_n = II\left(\frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}\right),$$ s — натуральный параметр

$$\pm k_n = \langle \ddot r, \vec m \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle r_{uu}, \vec m \rangle}_{L} \dot u^2 + 2 \underbrace{\langle r_{uv}, m \rangle}_{M} \dot u \dot v +$$

$$+ \underbrace{\langle r_{vv}, \vec m \rangle}_{N} \dot v^2 =$$

$$= (\dot u \ \ \dot v) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix}$$

матрица II в базисе r_u, r_v

I, II гладко зависят от точки $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ E, F, G, L, M, N являются гладкими функциями от точки

I положительно определена

Линейная алгебра:

$$\left.\begin{array}{l} A \\ B - \text{положит. опред.} \end{array}\right\}$$ квадр. формы.

при замене базиса $\tilde{A} = C^T A C$

$$\tilde{B} = C^T B C$$

Утв1) кв. форму заменой базиса можно привести к виду $\begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Сл1) В заменой базиса можно привести к $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

$$\exists C : \tilde{B} = C^T B C = E$$
$$\tilde{A} = C^T A C$$

Утв2 Квадратичную форму можно диагонализовать ортогональным преобразованием

$$\exists \hat{C} : \hat{A} = \hat{C}^T \tilde{A} \hat{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = \hat{C}^T \underset{E}{\underset{\shortparallel}{\tilde{B}}} \hat{C} = \hat{C}^T E \hat{C} = \hat{C}^T \hat{C} = E$$

Теорема Если есть две квадр. формы A и B, причем B положительно определена, то заменой базиса можно A диагонализовать, а B привести в E.

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad B \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

Опр λ_i — собств. числа пары кв. форм A и B.

Ут λ_i — корни $\det(A-\lambda B)=0$, где A и B можно записать в любом базисе

▷ $$\det(C^TAC - \lambda C^TBC)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\det(C^T(A-\lambda B)C)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{\det C^T}_{\neq 0}\det(A-\lambda B)\underbrace{\det C}_{\neq 0}=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\det(A-\lambda B)=0$$

т.е. всё равно в каком базисе это уравнение писать.

Запишем в базисе у Теорем

$$\det\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\right) = 0$$

Корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ◭

Базис у Теоремы $w_1, \dots, w_n$.

<u>Упр</u> $\lambda_i \in \mathbb{R}$

<u>Упр</u> w_i — решение $(A - \lambda_i B)w = 0$ (*)

<u>Утв</u> решения (*), отвечающие $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны отн B

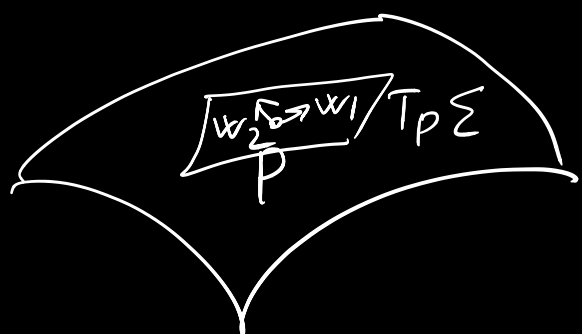
<u>Утв</u> Если λ_i имеет кратность 1, то решение (*) определено однозначно с точностью до пропорциональности.

II, I — положит. определенная

<u>Утв</u> $\exists$ в каждой точке базис w_1, w_2 в касательном пр-ве, в котором $\mathrm{II} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, $\mathrm{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

<u>Опр</u> λ_1, λ_2 — главные кривизны

поверхность в этой точке
w_1, w_2 — главные направления в этой точке



<u>Ут</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow w_1$ и w_2 определены однозначно с точностью до $\pm$,
$w_1 \perp w_2$, $\underbrace{|w_1| = |w_2| = 1}_{\text{т.к } I \text{ — это } (\cdot,\cdot)}$

$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ в качестве w_1 и w_2 можно взять любой о/н базис

<u>Опр</u>

$H = \lambda_1 + \lambda_2$ средняя кривизна

$K = \lambda_1 \lambda_2$ гауссова кривизна

$$\det(\mathrm{II} - \lambda \mathrm{I}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det((\mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1} - \lambda E)\,\mathrm{I}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det(\mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1} - \lambda E)\,\underset{\neq 0}{\det \mathrm{I}} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\det(\mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1} - \lambda E) = 0$$

Утв λ_i – с. числа оператора $\mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1}$

в w_1, w_2 $\quad \mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$L \quad C^{-1}LC$

$$\det(C^{-1}LC) = \det(C^{-1}) \det L \det C =$$

$$= \frac{1}{\det C} \det L \det C = \det L$$

Утв $K = \dfrac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}}$ в любом базисе

$$\triangleright \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} = \det \mathrm{II} \det \mathrm{I}^{-1} = \det \mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1} =$$

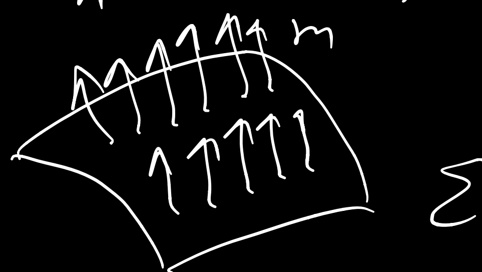
$$\underset{\text{в базисе } w_1, w_2}{=} \lambda_1 \lambda_2 = K \ \blacktriangleleft$$

$$\mathrm{tr}(C^{-1}LC) = \mathrm{tr}(CC^{-1}L) = \mathrm{tr}\, L$$

Ут $H = \mathrm{tr}(\mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1})$ в любом базисе

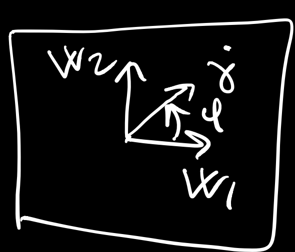
▷ $\mathrm{tr}(\mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1}) \underset{\text{в базисе } w_1, w_2}{=} \lambda_1 + \lambda_2 = H$ ◁

$\tilde{k}_n = \langle \ddot{r}, \vec{m} \rangle$ нормальная кривизна со знаком



Ут $\tilde{k}_n = \mathrm{II}(\dot\gamma, \dot\gamma)$, $\dot{} = \frac{d}{ds}$, s — нат. параметр

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ в } w_1, w_2$$



$|\dot\gamma| = 1$

$T_p\Sigma$

φ — угол от w_1 до $\dot\gamma$, отсчитываемый в сторону w_2

$\Rightarrow \dot{\gamma} = \cos\varphi\, w_1 + \sin\varphi\, w_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{k}_n(\varphi) = \mathrm{II}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi$$

<u>Утв</u> Если в-р скорости кривой (в любой параметризации) образует с w_1 угол φ (отсчитываемый в сторону w_2), то

$$\boxed{\tilde{k}_n(\varphi) = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi}$$

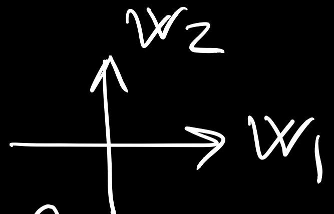
(формула Эйлера)

$$\frac{d\tilde{k}_n}{d\varphi} = -2\lambda_1 \cos\varphi \sin\varphi + 2\lambda_2 \sin\varphi \cos\varphi =$$

$= (\lambda_2 - \lambda_1)\sin 2\varphi$

$\lambda_2 \neq \lambda_1 \Rightarrow$ min и max $\tilde{k}(\varphi)$ при

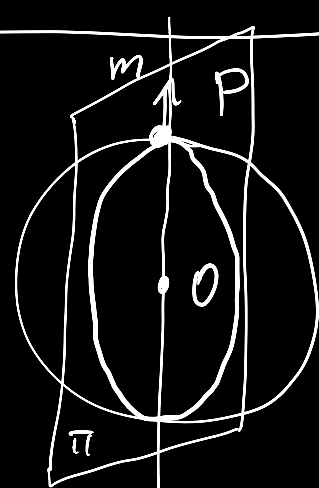
$\varphi = \frac{\pi}{2} k$



Т.е. доказано

__Утв__ w_1 и w_2 — направления, такие, что k_n кривых к таким касательным направлениям достигают максимумов или минимумов.

__Пример__ Сфера радиуса R

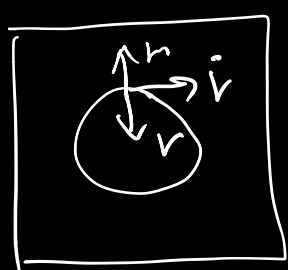


сечение $S^2 \cap \Pi$ — большая окружность радиуса

R. У неё $k = \frac{1}{R}$

Это плоская кривая (лежит в Π) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\ddot{r}$ лежит в Π и $\ddot{r} \perp r$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow \ddot{r} \parallel n$

$\Rightarrow \tilde{k}_n = \pm k = \pm \frac{1}{R}$

$\Rightarrow \forall \varphi \quad \tilde{k}_n = \pm \frac{1}{R}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ и $\pm \frac{1}{R} = \lambda_1 = \lambda_2$

$\Rightarrow K = \frac{1}{R^2}$

$H = \pm \frac{2}{R}$

<u>Замечание 1</u> Что происходит при изменении направления поля нормалей

$$n \longmapsto -n$$

$$\mathrm{I} \longmapsto \mathrm{I}$$

$$\mathrm{II} \longmapsto -\mathrm{II}$$

$$\mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1} \longmapsto -\mathrm{II}\,\mathrm{I}^{-1}$$

$$\lambda_i \longmapsto -\lambda_i$$

$$K=\lambda_1\lambda_2 \longmapsto K=\lambda_1\lambda_2$$

<u>Утв</u> K не зависит от выбора $\vec{n}$

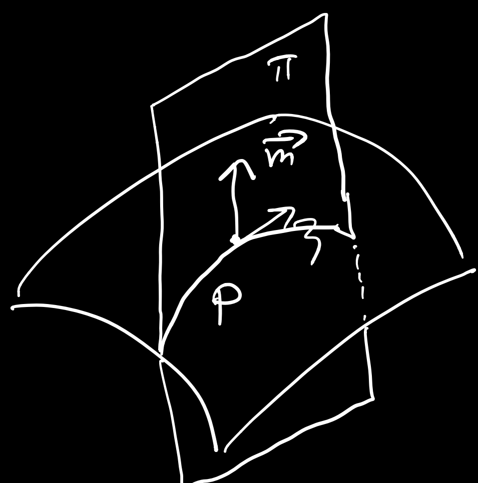
$$H=\lambda_1+\lambda_2 \longmapsto -H$$

<u>Утв</u> При смене направления $\vec{n}$ средняя кривизна H меняет знак

$$\frac{mH}{|H|} \longmapsto \frac{mH}{|H|}$$

<u>Опр</u> $\frac{mH}{|H|}$ поле $\overbrace{\text{нормалей}}^{\text{единичных}}$ средней кривизны

$\boxed{\text{Замечание 2}}$



$\xi \in T_P \Sigma$

Σ

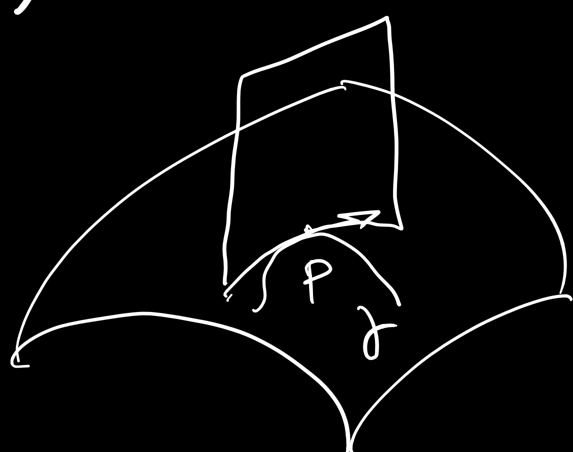
Π порождено $P, \vec{m}, \xi$

<u>Упр</u> кривые $\Pi \cap \Sigma$ гладкие в достаточно малой окрестности P.

<u>Опр</u> $\Pi \cap \Sigma$ называется нормальное сечение Σ в P в направлении

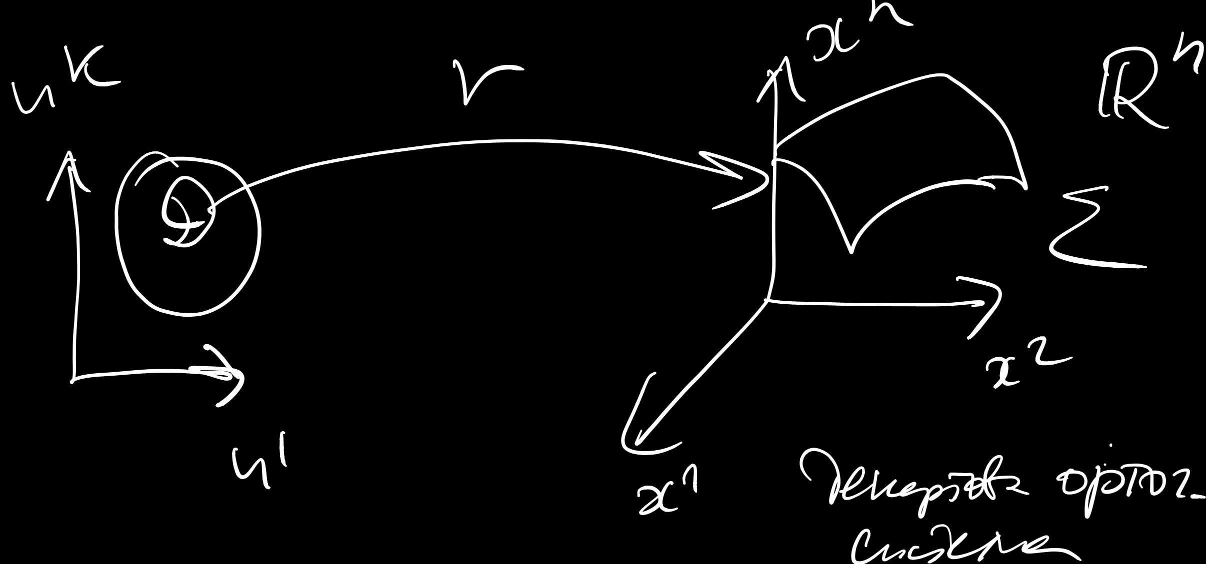
вектора 3.

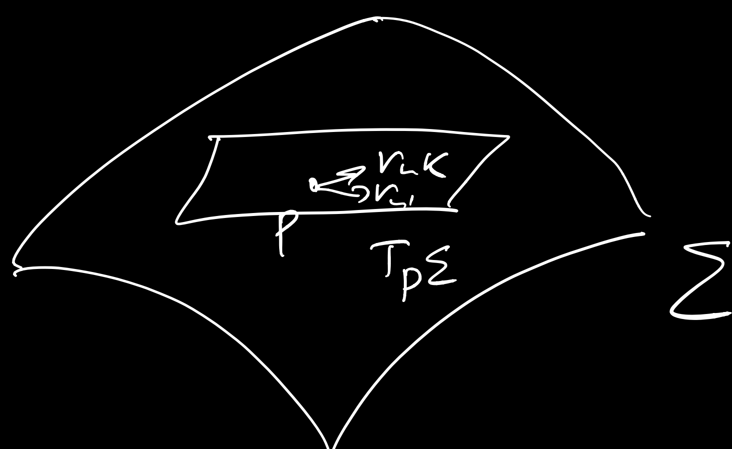
Это плоская кривая (лежит в π) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ у неё $\ddot{\gamma}$ лежит в π и $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$
(мы в натуральной параметризации) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $k_n = k$



кривизна нормального сечения в направлении $\dot{\gamma}$ равна нормальной кривизне γ.

Общий случай k-мерных поверхностей (k-поверхностей) в n-мерном евклидовом пространстве





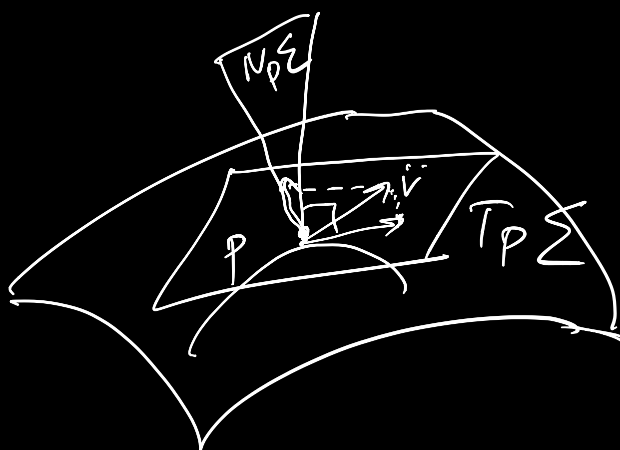
$$T_P\Sigma = \mathrm{span}(r_{u^1}(P), \dots, r_{u^k}(P))$$

$$\dim T_P\Sigma = k$$

<u>Опр</u> $N_P\Sigma = (T_P\Sigma)^\perp$

называется нормальным пространством к Σ в т. P.

$$\dim N_p\Sigma = n-k$$



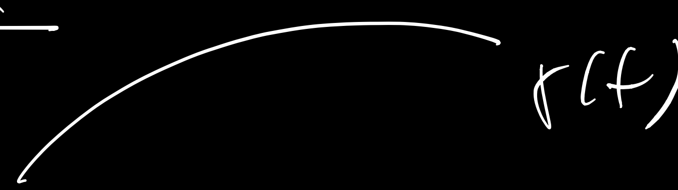
$$k_n = |T_{N_p\Sigma}\,\ddot\gamma|$$ нормальная кривизна

$$k_g = |T_{T_p\Sigma}\,\ddot\gamma|$$ геодезическая кривизна

$\dot{} = \frac{d}{ds}$, s — натуральный параметр

Воспоминание

(1)

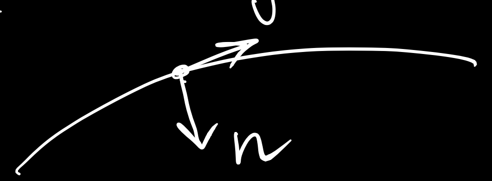


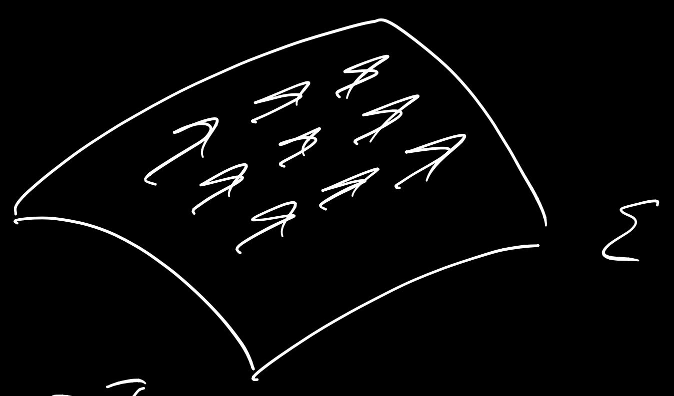
$$\frac{d f(\gamma(t))}{dt} = \partial_{\dot\gamma} f$$

Производная функции по параметру на кривой равна производной ф-ции вдоль вектора скорости этой кривой.

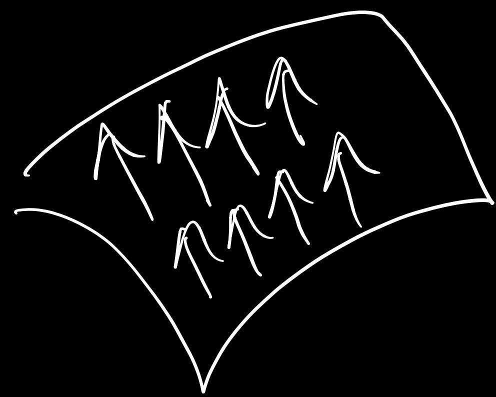
② Плоские формулы Френе

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{ds} = kn \\ \dfrac{dn}{ds} = -k\tau \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_\tau \tau = kn \\ \partial_\tau n = -k\tau \end{cases}$$





Опр X — касательное векторное поле, если $X(p) \in T_p \Sigma$



<u>Опр</u> ξ – нормальное векторное поле на Σ, если $\xi(P) \in N_P \Sigma$

$L \subset V \iff P: V \to V$ ортогональный проектор на L

X касательное

Σ

$f: \Sigma \to \mathbb{R}$

$\partial_X f$ определена

$$\partial_X Y_{(A)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Y(A+\varepsilon X) - Y(A)}{\varepsilon}$$

$$\partial_{\underline{X}} \underline{Y} = \underbrace{P(\partial_{\underline{X}} \underline{Y})}_{\nabla_X Y} + \underbrace{(\mathrm{Id}-P)(\partial_{\underline{X}} Y)}_{B(X,Y)}$$

$$\partial_{\underline{X}} \xi = \underbrace{\underline{P}(\partial_{\underline{X}} \xi)}_{-w_\xi(X)} + \underbrace{(\mathrm{Id}-P)(\partial_{\underline{X}} \xi)}_{\nabla^{N\Sigma}_X \xi}$$

P_A – ортог. проектор на $T_A\Sigma$