Анализ на многообразиях

Лекция 9

X, Y касательные в. поля

ξ нормальное векторное поле

$$\left.\begin{aligned} \partial_X Y &= \nabla_X Y + B(X,Y) \\ \partial_X \xi &= -W_\xi(X) + \nabla_X^{N\Sigma} \xi \end{aligned}\right\}$$

деривационные формулы Гаусса–Вейнгартена

$\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \Sigma = k$

$e_1, .., e_k$ базис в касательных векторных полях

$\eta_1, .., \eta_{n-k}$ базис в нормальных векторных полях

$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^{l} e_l$ $\qquad$ Γ_{ij}^{l} символы Кристоффеля

$B(e_i, e_j) = b_{ij}^{\nu} \eta_\nu$

$\nabla_{e_i}^{N\Sigma} \eta_\nu = K_{i\nu}^{\mu} \eta_\mu$

$$W_{\eta_\nu}(e_i) = w_{i\nu}^{j} e_j$$

$$\langle W_\xi(X), Y\rangle = \langle B(X,Y), \xi\rangle$$

$$w_{i\nu}^{j} = b_{il}^{\mu} g_{\mu\nu} g^{lj}$$

Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена для базисных векторов

$$X = e_i,\ Y = e_j,\ \xi = \eta_\nu$$

Соглашение: $\partial_i := \partial_{e_i}$

$$\partial_i e_j = \Gamma_{ij}^{l} e_l + b_{ij}^{\nu} \eta_\nu \qquad (*)$$

$$\partial_i \eta_\nu = -b_{ij}^{\mu} g_{\nu\mu} g^{jl} e_l + K_{i\nu}^{\mu} \eta_\mu$$

это обобщение формул Френе

---

e_i базис в касательных в. полях

e^i дуальный базис в 1-формах

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Утв $\underset{\sum_i}{\underline{e^i \partial_i f}} = df$

▶ применим к e_ℓ

слева $e^i(e_\ell)\partial_i f = \delta^i_\ell \partial_i f = \partial_\ell f$

справа $df(e_\ell) = \partial_{e_\ell} f = \partial_\ell f$ ◀

Y — векторное поле

$\partial_{e_i} Y = \partial_i Y$ векторное поле

$e^i \partial_i Y$ 1-форма со значением в векторных полях

$$\begin{array}{c} e^i \partial_i Y \\ \parallel \\ dY \end{array}$$

$$dY(X) = \partial_X Y$$

$\mathbb{R}^n$ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ стандартный базис

$$Y = Y^1 \varepsilon_1 + \dots + Y^n \varepsilon_n$$

$$Y \longleftrightarrow \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}$$

$$\partial_X Y \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_X Y^1 \\ \vdots \\ \partial_X Y^n \end{pmatrix}$$

$$dY \longleftrightarrow \begin{pmatrix} dY^1 \\ \vdots \\ dY^n \end{pmatrix}$$

Умножим (*) на e^i

$$e^i \partial_i e_j = e^i \Gamma_{ij}^{e} e_e + e^i b_{ij}^{\nu} \eta_\nu$$

$$e^i \partial_i \eta_\nu = -e^i b_{ij}^{\mu} g_{\nu\mu} g^{je} e_e + e^i K_{i\nu}^{\mu} \eta_\mu$$

то есть

$$de_j = \Gamma_j^{e} e_e + b_j^{\nu} \eta_\nu \qquad (1)$$

$$d\eta_\nu = -b_j^{\mu} g_{\nu\mu} g^{je} e_e + K_\nu^{\mu} \eta_\mu, \qquad (2)$$

где $\Gamma_j^{e} = e^i \Gamma_{ij}^{e}$, $b_j^{\nu} = e^i b_{ij}^{\nu}$,

$K_\nu^{\mu} = e^i K_{i\nu}^{\mu}$ 1-формы

(1) и (2) — это равенства между векторнозначными 1-формами

$d^2\omega = 0$

Продифференцируем (1)

$$0 = d^2 e_j = d\left(\Gamma_j^{e} e_e\right) + d\left(b_j^{\nu} \eta_\nu\right) =$$

$$= d\Gamma_j^{e} \cdot e_e - \Gamma_j^{e} \wedge de_e + db_j^{\nu} \cdot \eta_\nu -$$

$$-b_j^\nu \wedge d\eta_\nu$$

Оставим только касательную часть

$$0 = \overbrace{d\Gamma_j^l e_l}^{l \to \bar{i}} - \overbrace{\Gamma_j^l \wedge \Gamma_l^m e_m}^{m \to \bar{i}} - \underbrace{b_j^\nu \wedge (-b_p^\sigma g_{\nu\sigma} g^{pl} e_l)}_{l \to \bar{i}}$$

$$0 = \left(d\Gamma_j^{\bar{i}} - \Gamma_j^l \wedge \Gamma_l^{\bar{i}} + b_j^\nu \wedge b_p^\sigma g_{\nu\sigma} g^{p\bar{i}}\right) e_{\bar{i}}$$

получаем

$$d\Gamma_j^{\bar{i}} - \Gamma_j^l \wedge \Gamma_l^{\bar{i}} + b_j^\nu \wedge b_p^\sigma g_{\nu\sigma} g^{p\bar{i}} = 0, \quad \bar{i} = 1, \dots, k$$

$$d\Gamma_j^{\bar{i}} + \Gamma_l^{\bar{i}} \wedge \Gamma_j^l = b_p^\sigma g_{\nu\sigma} g^{p\bar{i}} \wedge b_j^\nu$$

это равенство между 2-формами

Γ матрица из 1-форм с эл-тами Γ_i^j

$$d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = b_\nu \wedge b^\nu$$

$$\square + \square = \sum_{\nu} \Big|\,\text{—}$$

$$b^{\nu} = (b^{\nu}_{1} \dots b^{\nu}_{k}) = (b^{\nu}_{j})$$

$$b_{\nu} = \left(\Big| \right) \qquad b_{\nu} = \left(b_{\rho}^{\sigma}\, g_{\nu\sigma}\, g^{\rho i} \right) \leftarrow i$$

Мы доказали

<u>Утв</u> Имеет место уравнение Гаусса

$$\boxed{d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = b_{\nu} \wedge b^{\nu}}$$

это равенство между матрицами из 2-форм

$\nu = 1, \dots, n-k$

$$b_{\nu} \wedge b^{\nu} = b_{1} \wedge b^{1} + \dots + b_{n-k} \wedge b^{n-k}$$

В листке будет упражнение вывести

уравнение Петерсона–Кодацци, связывающее dB, B, Γ и K

В листке будет формула

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big(\partial_X\langle Y,Z\rangle + \partial_Y\langle Z,X\rangle - \partial_Z\langle X,Y\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle\Big)$$

Указание:

$\circ$) $\partial_X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

$\circ\circ$) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

---

e_i базис $\qquad g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$

$c_{ijl} = \langle [e_i, e_j], e_l\rangle$

<u>Утв</u> $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{lp}\big(\partial_i g_{jp} - \partial_p g_{ij} + \partial_j g_{pi} - c_{ipj} + c_{ijp} - c_{jpi}\big)$

Утв В частном случае
$$e_i = r_{u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}, \text{ где}$$
$$[e_i, e_j] = \left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right] = 0,$$
имеет место формула
$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{lp}\left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j}\right)$$

Утв В частном случае о/н базиса e_i
$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{lp}\left(-c_{ipj} + c_{ijp} - c_{jpi}\right).$$

Вывод: Γ зависит только от g_{ij}, то есть только от первой квадратичной формы.

Утв В о/н базисе $\Gamma^l_{ij} = -\Gamma^j_{il}$, то есть $\Gamma^T = -\Gamma$

▶ $\langle e_i, e^j \rangle = \delta_i^j$

$\partial_{e_l} \langle e_i, e^j \rangle = 0$

$\langle \nabla_{e_l} e_i, e^j \rangle + \langle e_i, \nabla_{e_l} e^j \rangle = 0$

$\langle \Gamma_{e_i}^p e_p, e^j \rangle + \langle e_i, \Gamma_{e^j}^q e_q \rangle = 0$

$\Gamma_{e_i}^j + \Gamma_{e^j}^i = 0$ ◀

Как преобразовывается Γ при замене базиса e_i?

$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^l e_l$

$\underbrace{e^i \nabla_{e_i} e_j}_{\nabla e_j} = e^i \Gamma_{ij}^l e_l$

∇e_j векторнозначная 1-форма, её значение на векторе X — это вектор $\nabla_X e_j$

$\nabla e_j = e_l \Gamma_j^l$

$$\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_k)$$

$$\nabla \mathbf{e} = \mathbf{e}\Gamma$$

$$\underline{\qquad} = \underline{\qquad}\,\square$$

T матрица замены базиса $e_1, \ldots, e_k$ на $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}T \Rightarrow$

$$\nabla\tilde{\mathbf{e}} = \nabla(\mathbf{e}T) =$$

$$= \nabla\mathbf{e}\cdot T + \mathbf{e}\,dT =$$

$$= \mathbf{e}\Gamma\cdot T + \mathbf{e}\,dT =$$

$$= \tilde{\mathbf{e}}\big(\underbrace{T^{-1}\Gamma T + T^{-1}dT}_{\tilde{\Gamma}}\big)$$

<u>Утв</u> При замене базиса

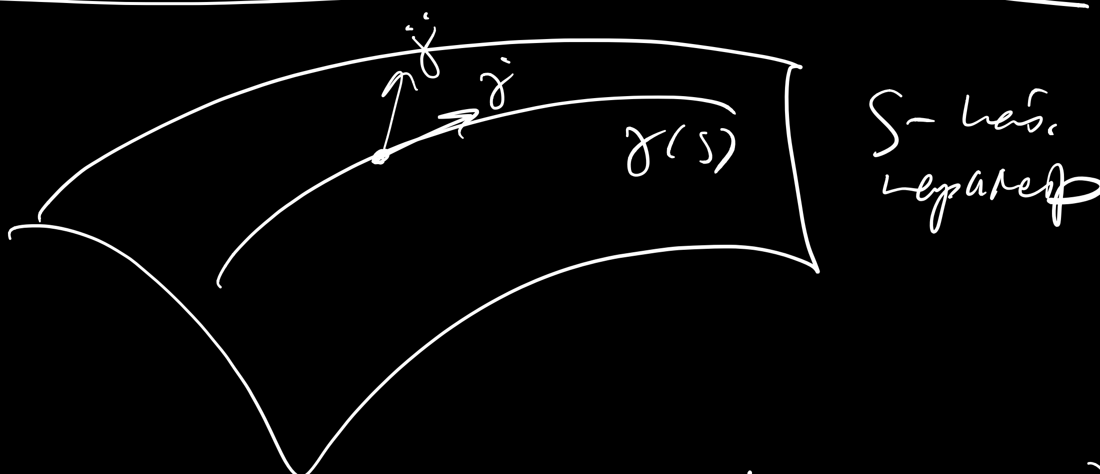
$$\tilde{\Gamma} = T^{-1}\Gamma T + T^{-1}dT \quad (*)$$

<u>Упр</u> $e_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \qquad \tilde{e}_j = \frac{\partial}{\partial v^j}$

$$\tilde{e}_j = \frac{\partial}{\partial v^j} = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial u^i} = e_i\,\frac{\partial u^i}{\partial v^j}$$

$\Rightarrow T = \left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\right)$

Написать в этом случае в терминах Γ_{ij}^{i}



$$\ddot\gamma = \frac{d}{ds}\dot\gamma = \partial_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + B(\dot\gamma,\dot\gamma)$$

<u>Утв</u>

$$k_n = |pr_{N_\gamma\Sigma}\ddot\gamma| = |B(\dot\gamma,\dot\gamma)|$$

$$k_g = |pr_{T_\gamma\Sigma}\ddot\gamma| = |\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma|$$

гиперповерхность $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$,

$\dim\Sigma = n-1$

η_1

Опр Собственные числа оператора Вейнгартена W_{η_1} называются главными кривизнами $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$

$H = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}$ средняя кривизна

$K = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}$ гауссова кривизна

Theorema egregium Гаусса

Рассмотрим двумерную поверхность Σ в $\mathbb{R}^3$.

$$K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det II}{\det I}$$

Th: K зависит только от I.

Это следствие из

Утв. Если базис e_1, e_2 о/н,

то $K e^1 \wedge e^2 = d\Gamma^1_2$

▶ Уравнение Гаусса:

$$d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = b_\mu \wedge b^\mu$$

пусть e_1, e_2 о/н базис

в нем $\Gamma^T = -\Gamma$, т.е. Γ к/симм.

Тогда $d\Gamma$ тоже к/симм

$(AB)^T = B^T A^T$ для числовых матриц

$(A \wedge B)^T = -B^T \wedge A^T$ для матриц из 1-форм

поэтому $(\Gamma \wedge \Gamma)^T = -\Gamma^T \wedge \Gamma^T =$

$= -(-\Gamma) \wedge (-\Gamma) = -\Gamma \wedge \Gamma$ тоже к/симм.

$\Rightarrow$ $d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ к/симм.

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ -* & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d\Gamma+\Gamma\wedge\Gamma)^1_2 = d\Gamma^1_2 + \Gamma^1_i\wedge\Gamma^i_2 =$$

$$= d\Gamma^1_2 + \underbrace{\cancel{\Gamma^1_1}}_{0}\wedge\Gamma^1_2 + \Gamma^1_2\wedge\underbrace{\cancel{\Gamma^2_2}}_{0} = d\Gamma^1_2$$

$$(b_\mu\wedge b^\mu)^1_2 =$$

выберем базис в норм. полях $n_1 = n$, $|n|=1$

$$= (b_{\underline{1}}\wedge b^{\underline{1}})^1_2 =$$

$$= b^{\underline{1}}_i \underbrace{g_{\underline{1}\underline{1}}}_{=1} \underbrace{g^{i1}}_{=\delta^{i1}} \wedge b^{\underline{1}}_2 = b^{\underline{1}}_1\wedge b_2 =$$

$$= (b_{i1}^{\underline{1}} e^i)\wedge(b_{j2}^{\underline{1}} e^j) =$$

$$= (\underbrace{b^{\underline{1}}_{11}}_{=L}e^1 + \underbrace{b^{\underline{1}}_{21}}_{=M}e^2)\wedge(\underbrace{b^{\underline{1}}_{12}}_{=M}e^1 + \underbrace{b_{22}}_{=N}e^2) =$$

$$=(LN-M^2)\,e^1\wedge e^2=$$

$$=\det \mathrm{II}\; e^1\wedge e^2=\frac{\det \mathrm{II}}{\underbrace{\det \mathrm{I}}_{=1}}\,e^1\wedge e^2=$$

$$=K\,e^1\wedge e^2$$

$$\Rightarrow\quad K\,e^1\wedge e^2=d\Gamma^1_2$$