Анализ на многообразиях

Лекция 11

уравнение геодезических

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

в локальных координатах $u^1,\dots,u^k$

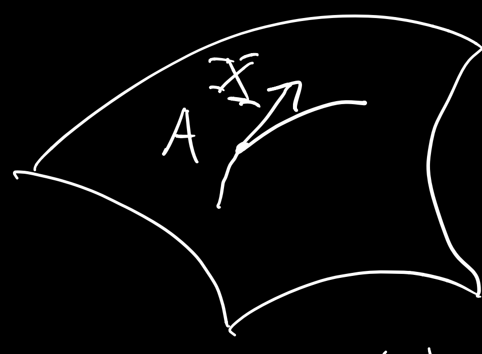
$$\gamma(t) = (u^1(t),\dots,u^k(t))$$

$$\ddot u^l + \Gamma^l_{ij}(u^1(t),\dots,u^k(t))\,\dot u^i \dot u^j = 0,$$

$l = 1,\dots,k$

Задача Коши:

$$\begin{cases} \ddot u^l + \Gamma^l_{ij}\dot u^i \dot u^j = 0 \\ u^l(t_0) = A^l \\ \dot u^l(t_0) = \bar X^l \end{cases}$$



$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \\ \gamma(t_0) = A \\ \dot\gamma(t_0) = \bar X \end{cases}$$

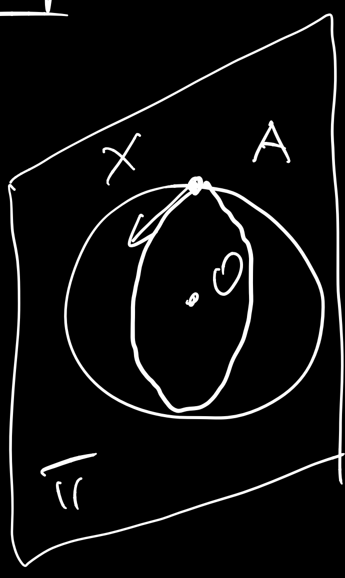
$A = (A^1,\dots,A^k)$

$\bar X = \bar X^i \dfrac{\partial}{\partial u^i}$

<u>Теорема</u> Пусть Σ — k-мерная гладкая регулярная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $A \in \Sigma$ и $X \in T_A\Sigma$. Тогда существует определенная на $(a, b) \ni t_0$ геодезическая $\gamma(t)$, т. что $\gamma(t_0) = A$, $\dot\gamma(t_0) = X$ и если это непродолжаемое решение, то оно единственно.

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \iff P(\ddot\gamma) = 0 \iff$$
$$\iff \ddot\gamma(t) \perp T_{\gamma(t)}\Sigma$$

<u>Пример</u> $S^2 \subset \mathbb{R}^3$



$\Pi \ni O, A \quad \Pi \parallel X$

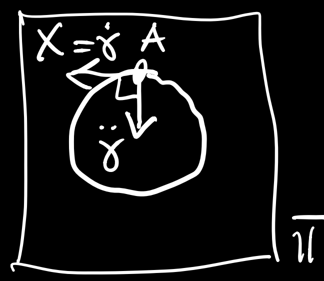
Π — единственна

$\Pi \cap S^2$ большой круг $\gamma(t)$, где t — естественный параметр

$\gamma(0) = A$

$\dot\gamma(0) = X$

$\gamma(t)$ окружность $\Rightarrow \ddot{\gamma} \parallel \pi \Rightarrow \ddot{\gamma} \parallel \gamma \Rightarrow$
$\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$

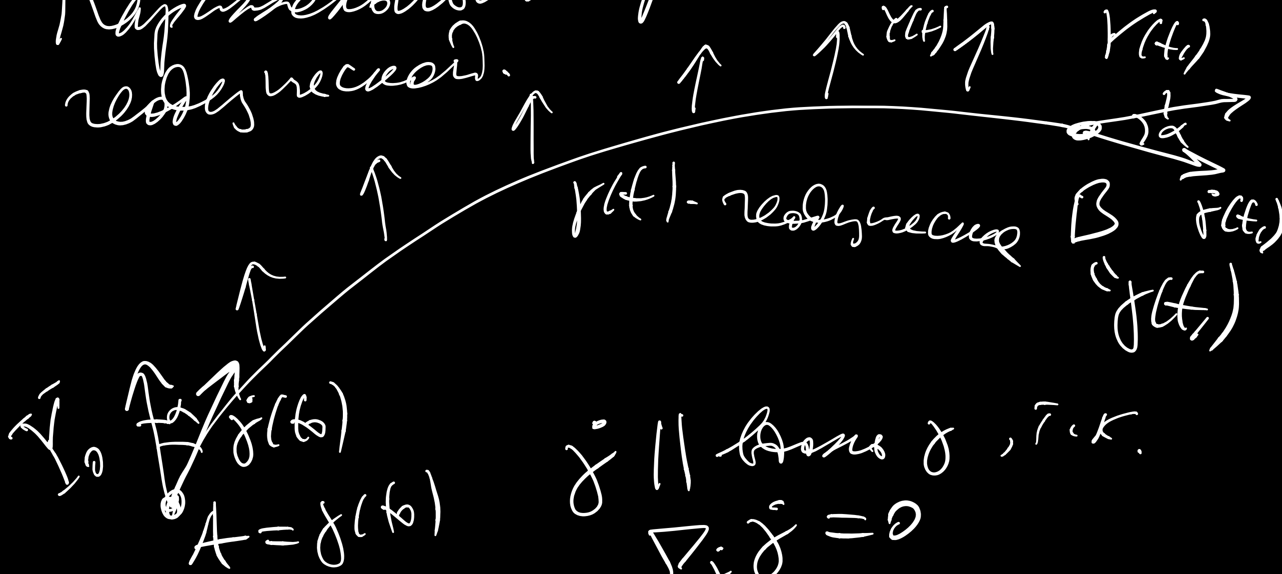


$\Rightarrow \ddot{\gamma} \perp T_{\gamma} S^2$

$\Rightarrow$ большие круги — это (высеч. пл. через центр) геодезические.

$\forall A, X \in T_A S^2$ $\exists$ большой круг $\gamma(t)$ т.ч. $\gamma(0)=A$, $\dot{\gamma}(0)=X$ $\Rightarrow$ по теореме единственности все геодезические на сфере — большие круги.

Параллельный перенос вдоль геодезической.



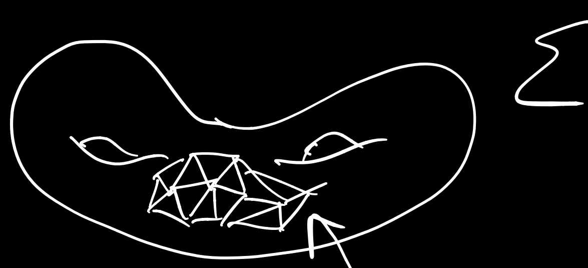
$\dot{\gamma} \parallel$ вдоль γ, т.к.
$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$

$\dim \Sigma = 2, \quad \Sigma \subset \mathbb{R}^3$

$\langle \dot\gamma(t), \gamma(t), n(\gamma(t)) \rangle \neq 0$

ориент. объем

$\langle \gamma_0, \dot\gamma(t_0), n(\gamma(t_0)) \rangle$ имеет тот же знак, что и
$\langle \gamma(t_1), \dot\gamma(t_1), n(\gamma(t_1)) \rangle$

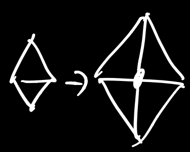


триангуляция поверхности

$\chi(\Sigma) = \text{В} - \text{Р} + \Gamma$ Эйлерова характеристика

"хи"

Утв $\chi(\Sigma)$ не зависит от выбора триангуляции



$B \to B+1$
$P \to P+3$
$\Gamma \to \Gamma+2$

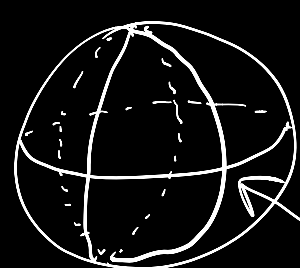
$$(B+1) - (P+3) + (\Gamma+2) = B - P + \Gamma$$

$B \to B+1$
$P \to P+3$
$\Gamma \to \Gamma+2$

аналогично

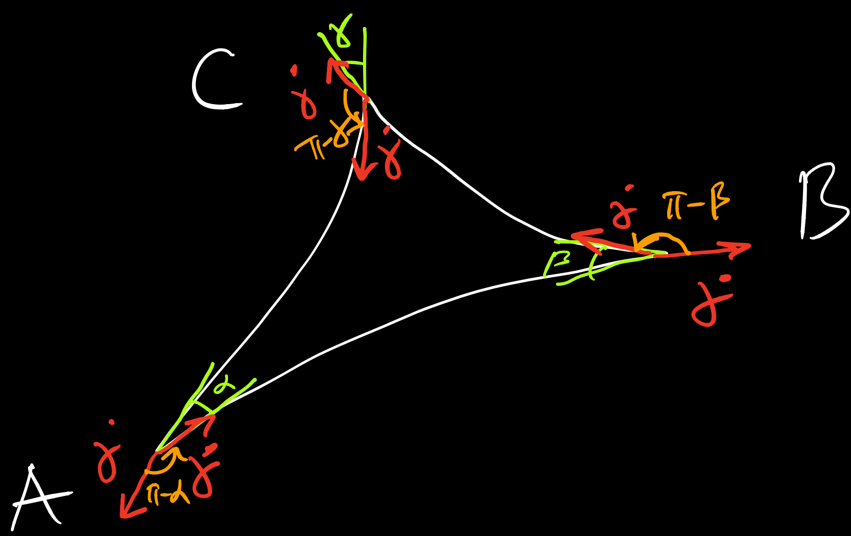
<u>Утв</u> На поверхности существует геодезическая триангуляция, т.е. такая, что все её ребра – геодезические.

S^2



8 геодезических треугольников

геодезические



Геодезический треугольник

Посчитаем угол поворота

$$2\pi = \iint_{\Delta} K\,dA + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma$$

форма площади $\sqrt{EG-F^2}\,du\wedge dv$

о/н корепер e^i $dA = e^1\wedge e^2$

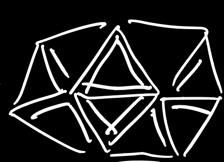
$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma - \pi = \iint_{\Delta} K\,dA}$$

Просуммируем по всем геодезическим треугольникам из триангуляции поверхности

2π

$$2\pi\cdot B - \pi\Gamma = \iint_{\Sigma} K\,dA$$

$$B - \frac{1}{2}\Gamma = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma} K\,dA$$

Триангуляция  $2P = 3\Gamma \quad P = \frac{3}{2}\Gamma$

$$\chi(\Sigma) = B - P + \Gamma = B - \frac{3}{2}\Gamma + \Gamma = B - \frac{1}{2}\Gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K\, dA$$

Теорема Гаусса-Бонне: Для двумерной ориентированной компактной поверхности Σ без края

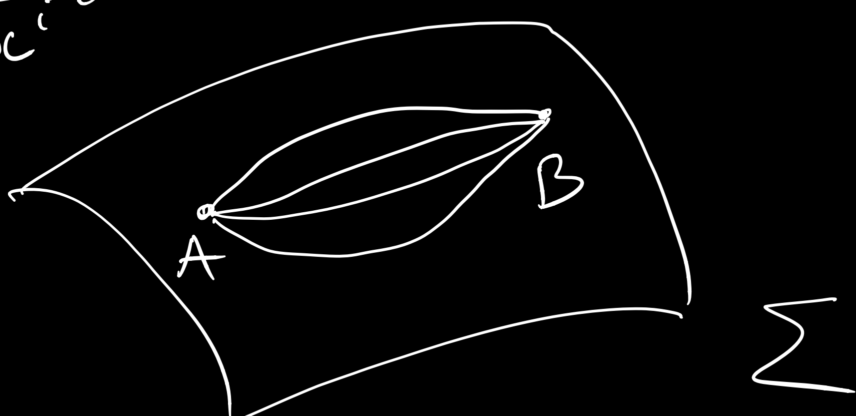
$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K\, dA$$

Вариационный подход к геодезическим

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ как искать её max / min?

экстремальные точки:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(A) = 0$$



V = множество всех гладких путей γ из A в B на Σ, т.ч. $\gamma(t_0)=A$, $\gamma(t_1)=B$

V – "пространство путей с закреплёнными концами"

$$L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} |\dot\gamma(t)|\,dt$$ длина пути

$L : V \to \mathbb{R}$ кратчайший путь из т. A в т. B – это минимум L на V.

Функции на V традиционно называют функционалами

$$E[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} |\dot\gamma|^2\,dt$$ функционал энергии

$E : V \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ A – экстремальна, если

① $\forall i$ $\frac{\partial f}{\partial x^i}(A) = 0$

$\Updownarrow$

② $\forall$ вектора $\underline{X}$ $\partial_{\underline{X}} f(A) = 0$

$\Updownarrow$ ▷ (1) $\Leftrightarrow$ (2) т.к. $\partial_{\underline{X}} f(A) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(A)\, \underline{X}^i$ ◁

(3) $\forall\, \gamma(t)$ т.что $\gamma(0) = A$ имеем

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = 0$$

▷ (2) $\Leftrightarrow$ (3) ($\Rightarrow$) $\dot\gamma(0)$, тогда

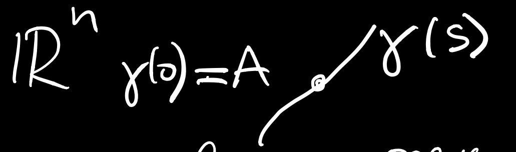
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \partial_{\dot\gamma} f(A) = 0$$

($\Leftarrow$) есть X, найдем γ т.что $\gamma(0) = A$, $\dot\gamma(0) = X$

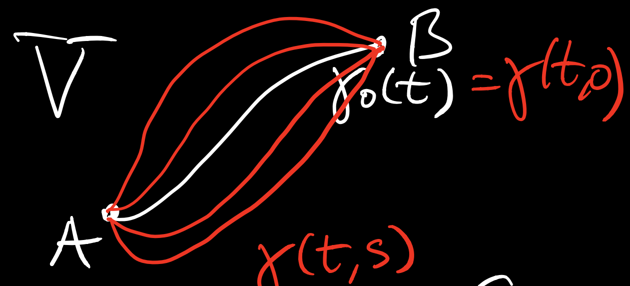
тогда $\partial_X f = \partial_{\dot\gamma} f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = 0$ ◁

Что такое кривые на V?

Кривые на пространстве кривых



кривые = вариации точки



вариация кривой

s – параметр вариации

У нас "вариации с закреплёнными

концами", т.е.

$$\forall s \quad \gamma(t_0, s) = A$$
$$\gamma(t_1, s) = B$$

Опр $\gamma(t,s)$ – вариация с закреплёнными концами пути $\gamma_0(t)$, если $\gamma(t,s)$ – гладкая

1) $\gamma(t,0) = \gamma_0(t)$

2) $\forall s \quad \gamma(t_0, s) = A$
$$\gamma(t_1, s) = B$$

$F: V \to \mathbb{R}$ функционал на V

Опр Кривая $\gamma_0(t) \in \bar{V}$ называется экстремальной кривой (экстремалью) функционала $F: \bar{V} \to \mathbb{R}$, если для любой вариации $\gamma(t,s)$ кривой $\gamma_0(t)$ с закреплёнными концами выполнено

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} F[\gamma(t,s)] = 0.$$

Утв. Геодезические — это экстремали функционала энергии.

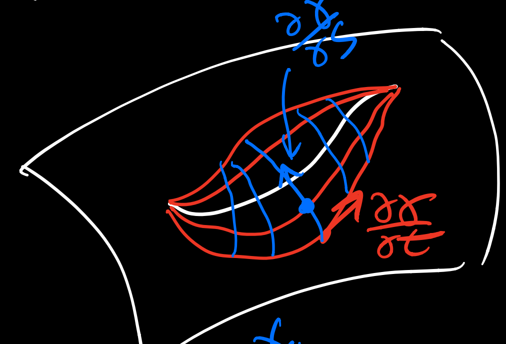
▷ $\gamma_0(t)$ $\qquad$ $\gamma(t,s)$ вариация

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E[\gamma(t,s)] =$$

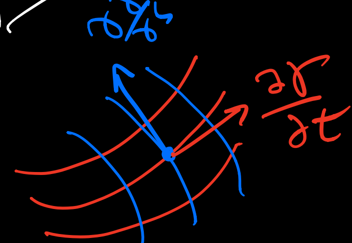
$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle dt \stackrel{?}{=}$$

$$\underset{t}{(t_0,t_1)} \times \underset{s}{(-\varepsilon,\varepsilon)} \xrightarrow{\gamma(t,\varepsilon)}$$



$$\stackrel{?}{=} \int_{t_0}^{t_1} \partial_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle dt \Big|_{s=0} =$$



$$\partial_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

$$= 2\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle dt \Big|_{s=0} =$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \Rightarrow \left[\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}} \frac{\partial\gamma}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial s}$$

$$= 2\int_{t_0}^{t_1} \underline{\left\langle \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle} dt \Big|_{s=0} =$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle = \partial_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= \underline{\left\langle \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle} + \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle$$

$$= 2\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle dt - \quad \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

$$-2\int_{t_0}^{t_1}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt\Big|_{s=0} =$$

$\forall s\quad \gamma(t_0,s)=A \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\gamma(t_0,s)=0$

аналогично $\frac{\partial\gamma}{\partial s}(t_1,s)=0$

$$=-2\int_{t_0}^{t}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}\Big|_{s=0}, \nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0\right\rangle dt$$

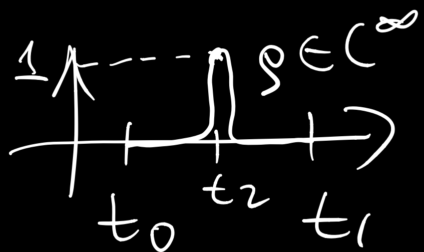
γ_0 геодезическая $\Rightarrow \nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E[\gamma_0]=0$$

Пусть γ_0 — экстремаль. Тогда для произвольного $W(t)=\frac{\partial\gamma}{\partial s}\Big|_{s=0}$ (единственное условие $W(t_0)=W(t_1)=0$) имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\langle W(t), \nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0\right\rangle dt=0$$

пусть $\exists\, t_2$ т.что $(\nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)(t_2)\neq 0$



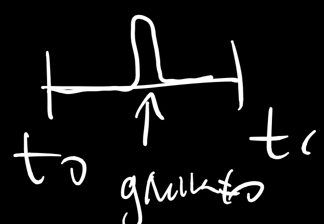
пусть $\rho(t_2)=1$ и $\rho(t)\neq 0$ в малой окрестн. t_2, где $\nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0 \neq 0$

$$W(t)=\rho(t)\,\nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0$$

тогда

$$\int_{t_0}^{t_1}\rho(t)\,|\nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0|\,dt = 0$$

противоречие $\Rightarrow$



$\Rightarrow \nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0 = 0$

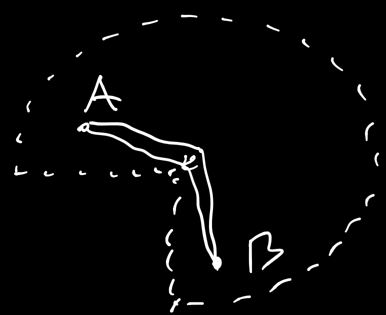
$\Rightarrow \gamma_0(t)$ — геодезическая $\blacksquare$

Утв Произвольные перепараметризации геодезических — экстремали функционала длины.

$$L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1}|\dot\gamma|\,dt$$

Упр (Указание: выберите на γ_0 аффинную натуральную параметризацию такую, что $\gamma_0(t_0)=A$, $\gamma_0(t_1)=B$ и $\forall s$ вариацию $\gamma(t,s)$ тоже имеет t афф. нат. параметром).

Следствие Если есть кратчайшая, соединяющая A и B на Σ, то она - геодезическая в некоторой перепараметризации



$$\Sigma,\ I \Rightarrow K_{\triangledown}$$
$$\Rightarrow \text{геодезические, параллельный перенос}$$
$$\Rightarrow \chi(\Sigma) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Sigma} K\,dA$$

все, что нам надо от $\mathbb{R}^n \supset \Sigma$, чтобы изучать