НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 3.
Гладкие регулярные кривые и k-поверхности в $\mathbb{R}^n$. 1.10.2020.

Задача 1. Доказать, что стандартная сфера $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является регулярной неявно заданной гладкой поверхностью в аффинном пространстве. Какова её размерность? Какие можно выбрать локальные координаты?

Задача 2. Доказать, что $\mathrm{SO}(3)$ — регулярная гладкая неявно заданная поверхность в пространстве вещественных 3×3 - матриц. Аналогичный вопрос для группы $\mathrm{O}(n)$. Какова размерность этих групп?

Задача 3. Доказать, что $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ — реулярная гладкая гиперповерхность в пространстве $n \times n$ - матриц.

Задача 4. Задать тор вращения как гиперповерхность

$$f(x, y, z) = 0$$

в $\mathbb{R}^3$. Гладкая ли эта поверхность? Неособа ли эта поверхность?

Задача 5*. Описать множество ортонормированных k-реперов с началом в точке $(0, \dots, 0)$ в $\mathbb{R}^n$ как неявно заданную поверхность в аффинном пространстве $k \times n$ - матриц. Доказать, что эта поверхность гладкая и регулярная, найти её размерность. Эта поверхность называется многообразием Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$. Что можно сказать про $V_1(\mathbb{R}^n)$ и $V_n(\mathbb{R}^n)$?

Задача 6. Найти касательное пространство $T_P\mathbb{S}^2$ к сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

в точке $P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Задача 7. Пусть V — касательный вектор в точке P из предыдущей задачи, такой, что его координаты, соответствующие стереографической проекции из северного полюса равны $(1, 1)$. Найти координаты этого вектора, соответствующие стереографической проекции из южного полюса.

Задача 8. В условиях предыдущей задачи, пусть $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничение функции $x + y + z$ на сферу. Найдите $\partial_V f$.

Задача 9. Будем говорить, что некоторая точка на гладкой регулярной плоской кривой является точкой перегиба, если в малой окрестности этой точки кривая лежит по обе стороны от касательной прямой в этой точке. Пусть кривая задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$. Доказать, что если (x_0, y_0) — точка перегиба, то

$$\left(F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right)(x_0, y_0) = 0.$$

Сколько точек перегиба может быть у кубики (то есть в случае, когда $F(x, y)$ — полином степени 3 от x, y)?

Задача 10. Физики говорят, что «если $f(x, y, z) = 0$, то $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1$». Придайте смысл этому высказыванию.