НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 5. Поверхности в трёхмерном и n-мерном евклидовом пространстве. Ковариантная производная касательных и нормальных векторов, вторая квадратичная форма и оператор Вейнгартена. 29.10.2020.

Задача 1. Написать параметрическое уравнение тора вращения и найти индуцированную метрику, то есть первую квадратичную форму.

Задача 2. Найти первую и вторую квадратичные формы, гауссову и среднюю кривизны для сферы произвольного радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задача 3. Найти также оператор Вейнгартена и ковариантные производные для сферы произвольного радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задача 4. Доказать, что поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами есть плоскость.

Задача 5. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для поверхности вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u)\cos\varphi, \rho(u)\sin\varphi).$$

Задача 6. Доказать, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой $\left(\dfrac{\mathrm{ch}(at+b)}{a}, t\right)$.

Задача 7. Доказать, что средняя кривизна есть интегральное среднее всех нормальных кривизн

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(\varphi)\, d\varphi,$$

где $k(\varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ, отсчитываемом от одного из главных направлений.

Задача 8. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ и точку $A \in M$. Выберем нормаль $\mathbf{m}$ в точке A. Запишем $B(X, Y)$ в виде $B(X, Y) = \hat{B}(X, Y)\mathbf{m}$, где $\hat{B}$ некоторая обычная (вещественнозначная) квадратичная форма на касательной плоскости. Доказать, что $\hat{B}(X, Y) = \mathbf{II}(X, Y)$, то есть это вторая квадратичная форма поверхности.

Задача 9. Рассмотрим двумерную поверхность в $\mathbb{E}^3$. В качестве базиса нормального пространства выберем единичный нормальный вектор $\eta_1 = \mathbf{m}$. Доказать, что $W_{\eta_1} = \mathbf{I}^{-1}{\cdot}\mathbf{II}$. Вывести отсюда, что определения главных кривизн для поверхностей в трёхмерном (через первую и вторую квадратичную форму) и n-мерном пространстве (через оператор Вейнгартена) совпадают.

Задача 10. Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{E}^n$. В качестве базиса нормального пространства будем брать единичный нормальный вектор $\eta_1 = \mathbf{m}$. Найти связность в нормальном расслоении.